Grażyna KOZUŃ-CIEŚLAK

Wykorzystanie metody DEA do oceny efektywności w usługach sektora publicznego[1]

Metoda Data Envelopment Analysis (DEA) dzięki wielu zaletom i raczej nielicznym ograniczeniom, jakie nakłada na badacza jest szeroko stosowana na świecie do szacowania efektywności działania zarówno podmiotów sektora prywatnego, jak i publicznego.

PRZEGLĄD LITERATURY ZAGRANICZNEJ

Zainteresowanie możliwościami metody DEA zaowocowało licznymi publikacjami, których listę znaleźć można w artykule *Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA* (Emrouznejad i in., 2008). Wymieniono w nim 4015 opracowań napisanych przez 2500 autorów, pochodzących z ponad 50 krajów. Blisko 20% tych publikacji to artykuły zamieszczone w periodykach: „European Journal of Operational Research", „Journal of Productivity Analysis" oraz „Journal of the Operational Research Society", prawie 10% to rozdziały w książkach, a 1,6% to książki poświęcone samej metodzie.

Ostatnie dwudziestolecie pokazało nie tylko ogromny wzrost zainteresowania metodą, ale też różnorodność jej aplikacji w celu oceny działalności wielu bardzo różnych podmiotów gospodarujących. Zastosowania dotyczyły oceny działalności takich jednostek, jak: szpitale, uniwersytety, miasta, sądy, firmy prywatne i wiele innych. Metoda wymaga niewielu założeń i otwiera możliwości zastosowania jej w przypadkach, w których nie można zastosować metod statystycznych i ekonometrycznych. Z taką sytuacją często mamy do czynienia, gdy rozważania dotyczą dóbr i usług dostarczanych w podaży nierynkowej:

- Afonso i in. (2006) wykorzystali metodę DEA do oceny efektywności w wybranych krajach „rynków wschodzących", Sengupta (2002) również zastosował DEA do międzynarodowych porównań efektywności, Chang i in. (1995) zastosowali DEA do badania zmian w poziomie rozwoju Tajwanu.
- Karkazis i Thanassoulis (1998) szacowali metodą DEA efektywność polityki regionalnej w północnej Grecji (efekt stymulowania inwestycji sektora prywatnego inwestycjami sektora publicznego i zachętami inwestycyjnymi), natomiast Halkos i Tzeremes (2005) badali efektywność greckich prefektur w trzydziestoletnim horyzoncie czasowym. Szerokie zastosowanie techniki DEA można zna-

[1] Artykuł stanowi fragment pracy pt. *Ocena efektywności wydatków sektora publicznego w Polsce na tle krajów Unii Europejskiej* zrealizowanej w 2010 r. w ramach projektu badawczego nr NN112069436.

leźć w modelach planowania rozwoju regionalnego w Stanach Zjednoczonych prezentowanych przez Macmillana (1986); Hughes i Edwards (2000) zastosowali DEA do badania efektywności wydatków publicznych z punktu widzenia efektów „*spillover*", a Prieto i Zoflo (2001) badali efektywność wydatków na infrastrukturę w hiszpańskich jednostkach samorządu terytorialnego.

- Charnes i in. (1989), Sueyoshi (1992), Byrnes i Storbeck (2000) zastosowali metodę DEA analizując efektywność chińskich miast (z punktu widzenia oceny rozwoju ekonomicznego, stosowanej polityki regionalnej), Zhu (2001) wykorzystał metodę do porównania jakości życia w 20 miastach z listy „najlepszych miast" w rankingu magazynu „Fortune".
- Kirigia i in. (2004) wykorzystywali metodę DEA do mierzenia efektywności centrów opieki zdrowotnej w Kenii, Zere i in. (2001) badali efektywność publicznych szpitali w prowincjach Południowej Afryki, Sahin i Ozcan (2000) w Turcji, Giokas (2001) w Grecji, a Steinmann i Zweifel (2003) w Szwajcarii.
- Metoda DEA znalazła również szerokie zastosowanie w badaniach efektywności w sektorze wydatków na edukację i rozwój nauki: Abbot i Doucouliagos (2003) badali efektywność australijskich uniwersytetów, Mizala i in. (2002) efektywność szkół w Chile, a Bradley i in. (2001) badali wpływ współzawodnictwa na efektywność szkół średnich w Anglii. Grosskopf i Moutray (2001) oceniali metodą DEA wpływ decentralizacji na funkcjonowanie szkół wyższych w Chicago.
- Można też znaleźć w literaturze badania dotyczące efektywności funkcjonowania policji (Drake, Simper, 2003; Diez-Ticio, Mancebon, 2002) czy transportu publicznego (Pina i in., 2001).

Podejmowane są liczne próby wykorzystania metody DEA do oceny efektywności sektora publicznego w skali: międzynarodowej, regionalnej i lokalnej oraz w odniesieniu do wydatków związanych z niektórymi funkcjami sektora publicznego (ochrona zdrowia, edukacja, zwalczanie ubóstwa czy rozwój infrastruktury).

DEA powstała jako efekt prac nad oceną działalności, która nie poddawała się tradycyjnym metodom opartym na wskaźnikach lub modelach statystycznych czy ekonometrycznych. Wydaje się zatem celowe poświęcenie uwagi genezie metody, która od 30 lat stale się rozwija. Znajduje też ona coraz szersze zastosowanie w badaniach prowadzonych w Polsce (Adamczyk, Nitkiewicz, 2007; Domagała, 2009; Dybał, 2004; Gospodarowicz, 2000; Karbownik, Kula, 2009; Kisielewska, 2007; Pajor, Prędki, 2009; Stępień, 2004; Rogowski, 1998; Zamojska, 2009).

GENEZA DEA JAKO METODY OCENY UKŁADÓW WIELOWYMIAROWYCH

DEA[2] to metoda badania efektywności, która opracowana została w 1978 r. przez A. Charnesa i in. (1978). Jest to nowe podejście do oceny efektywności podmiotów gospodarujących, tzw. jednostek decyzyjnych *Decision Making Unit*

[2] W polskiej literaturze nazywana najczęściej metodą granicznej analizy danych lub obwiedni danych.

(DMU), które „zorientowane jest na dane". Autorzy, wykorzystując koncepcję produktywności definiowanej jako iloraz pojedynczego nakładu i pojedynczego efektu, zastosowali ją do sytuacji wielowymiarowej, w której występuje więcej niż jeden nakład i więcej niż jeden efekt. Zastosowali oni technikę programowania liniowego do estymacji tzw. „efektywności technicznej"[3]. Stworzyli też pierwszy model DEA, znany w literaturze jako CCR (nazwę tworzą inicjały nazwisk autorów). Model ten zbudowany został na podstawie miar efektywności przedstawionej przez M. J. Farrella[4], a oparty na koncepcji „analizy działalności" (*activity analysis*) rozwijanej przez T. Koopmansa i G. Debreu (Cooper i in., 2005).

Geneza metody DEA[5] związana jest z dysertacją, nad którą pracował E. Rhodes we wczesnych latach 70. ub. wieku. Była to praca pisana pod kierunkiem naukowym W. W. Coopera i dotyczyła oceny programów edukacyjnych skierowanych przeciw marginalizacji społecznej dzieci w Stanach Zjednoczonych. Rhodes skoncentrował uwagę na wynikach badań uzyskanych w ramach programu „*Follow Through*"[6], którym objęte były wybrane szkoły publiczne w różnych stanach. Baza danych[7], do której Rhodes miał dostęp była zatem bardzo duża i dawała dużą swobodę ich doboru. Niestety, jak pisze o tym Cooper, wszystkie próby zastosowania w badaniu metod statystyczno-ekonometrycznych przynosiły niezadowalające rezultaty[8]. Poszukiwania sposobu poradzenia sobie z problemem oszacowania efektywności analizowa-

[3] Efektywność techniczna (nazywana też technologiczną) odnosi się do konwersji (przetwarzania) zasobów (*inputs*, np. usług pracy, surowców, półfabrykatów) w określoną produkcję (*outputs*). Ocena efektywności technicznej zdeterminowana jest przez różnicę między wynikiem relacji rezultaty/nakłady osiąganym przez dany podmiot (DMU) a wynikiem takiej relacji dla „najlepszego wzorca" (który może być określony teoretycznie lub empirycznie). Efektywność techniczna może być wyrażona jako potencjał zwiększenia ilości rezultatów przy danej ilości nakładów lub potencjał redukcji nakładów zużywanych do wytworzenia danej ilości rezultatów. Poziom efektywności technicznej pozostaje pod wpływem rozmiarów działalności (*scale efficiency*) DMU oraz stosowanych praktyk menedżerskich (*non-scale technical efficiency*). Efektywność techniczna jest oparta na „technologicznych możliwościach produkcyjnych", nie jest natomiast powiązana z poziomem cen i kosztów.

[4] Farrell w swej pracy z 1957 r. wskazuje badania Koopmansa dotyczące efektywności alokacji zasobów oraz „koncepcję współczynnika zużycia zasobów" Debreu jako inspirujące dla jego własnych badań nad pomiarem efektywności technicznej (Farrell, 1957).

[5] Opracowano na podstawie (Cooper i in., 2004).

[6] Projekt *Follow Through* (*FT*) uważany jest za dotychczas największy na świecie i najdroższy eksperyment edukacyjny. Rozpoczął się w 1967 r. jako część amerykańskiego programu wojny z ubóstwem (*War on Poverty*) prezydenta L. B. Johnsona. Kontynuowany był do 1995 r. i kosztował ok. miliarda dolarów. Więcej na ten temat zob.: http://darkwing.uoregon.edu/~adiep/ft/grossen.htm.

[7] Program realizowany był przy wsparciu władz federalnych, a pozyskane dane przetwarzała na użytek tego badania firma konsultingowa Abt Associates z Bostonu, w ramach kontraktu z Departamentem Edukacji Stanów Zjednoczonych.

[8] Trudności sprawiało przede wszystkim formułowanie modeli statystycznych i ekonometrycznych wykorzystujących zmienne będące wynikami testów psychologicznych, które przykładowo nakład (*input*) wyrażały w „ilości czasu spędzonego przez matkę na czytaniu z dzieckiem", a rezultat (*output*) — w postaci „wzrostu samooceny upośledzonego dziecka".

nego przedsięwzięcia, doprowadziły Rhodesa do wspomnianego artykułu M. J. Farrella.

Farrell na początku lat 50. XX w. prowadził badania dotyczące produktywności rolnictwa amerykańskiego w porównaniu z produktywnością tego sektora w innych krajach (*Steering…*, 1997). Powodowany niezadowalającymi wynikami pomiaru wyników działalności jednostki gospodarującej na podstawie wskaźników produktywności pracy, kapitału itd., zaproponował bardziej całościowe podejście do badań, oparte na „analizie działalności", zastępując jednocześnie koncepcję „produktywności" bardziej ogólną koncepcją „efektywności względnej". Jego miary efektywności miały zastosowanie do każdej organizacji produkcyjnej — jak sam twierdził „od warsztatu aż po całą gospodarkę". Miara efektywności sformułowana przez Farrella odnosiła się do badania tzw. „efektywności technicznej" albo wielkości „straty", która mogłaby być wyeliminowana nie pogarszając ani poziomu zaangażowanych nakładów, ani osiągniętych wyników. Farrell oddzielił tu badaną przez siebie „efektywność techniczną" od efektywności „alokacyjnej" i efektywności „skali".

Potrzeba sięgnięcia do dorobku Farrella skłoniła Coopera do zaproszenia do współpracy A. Charnesa, z którym już wcześniej zajmował się opracowaniem aplikacyjnej formuły obliczeniowej odnoszącej się do koncepcji analizy działalności T. C. Koopmansa (1951). Analiza działalności to rodzaj analizy produkcji, różniący się od klasycznej teorii produkcji i cen. Koopmans zastąpił funkcję produkcji opisem różnych elementarnych metod wytwarzania, które mogą zostać użyte w celu uzyskania pożądanych towarów. Ze zbioru tych elementarnych czynności, z których każda jest scharakteryzowana przez stałe relacje między nakładami i wynikami, wybiera się metody i rozmiary produkcji. Opis produkcji za pomocą liniowych kombinacji elementarnych czynności pozwala wyraźnie pokazać sposób, w jaki osiągana jest efektywność.

Analiza działalności Koopmansa, która wykorzystuje koncepcję efektywności znaną jako „kryterium Pareta"[9] pozwala ustalić, który program produkcji najlepiej pozwala osiągnąć dany cel i jakie muszą być nakłady surowców i półfabrykatów, aby uzyskać określoną wartość towarów finalnych. Osiągnięcia teoretyczne Koopmansa w dziedzinie analizy działalności są powiązane z podstawowym twierdzeniem programowania liniowego, które opisuje relację między rozwiązaniem zagadnienia pierwotnego i dualnego (Matkowski, 1991). Należy tu podkreślić, że Koopmans uhonorowany został w 1975 r. Nagrodą Nobla z dziedziny ekonomii, którą uzyskał wspólnie z L. W. Kantorowiczem za wkład do teorii optymalnej alokacji zasobów oraz za odkrycie i zastosowanie programowania liniowego w ekonomii (Kundera, 2004).

[9] W podręczniku *Manual of Political Economy* z 1906 r. włoski ekonomista V. Pareto ustanowił podstawy nowoczesnej ekonomii dobrobytu zauważając, że polityka społeczna jest zasadna, jeśli czyni jakieś osoby zamożniejszymi, nie czyniąc innych biedniejszymi. W ten sposób potrzeba dokonywania porównań między korzyściami dla jednych i stratami dla innych może być pominięta, nie ma też potrzeby ustalania „funkcji użyteczności" jednostek, których skutki polityki dotyczą, jak również nie ma konieczności ustalania „rangi ważności" zysków i strat każdej jednostki.

Podstawowym osiągnięciem Farrella było stworzenie koncepcji *best practice frontier*, określanej też mianem granicy efektywności lub granicy produkcji, będącej technologiczną granicą możliwości produkcyjnych osiągalnych dla danego podmiotu gospodarującego. Ta koncepcja pomiaru efektywności danej jednostki decyzyjnej w relacji do innych podobnych jednostek była „prototypowym" modelem DEA i stanowiła podwaliny dla rozwiniętego i udoskonalonego przez Charnesa, Coopera i Rhodesa modelu CCR.

Farrellowskie podejście do badania efektywności okazało się niezwykle wygodne z punktu widzenia problemów, z jakimi borykał się Rhodes w swojej dysertacji. Badania Farrella ograniczały się jednak do przypadków, w których występował jeden nakład i jeden efekt, Rhodes natomiast potrzebował zastosować metodę do badania obejmującego liczne nakłady i liczne efekty. Konieczne były więc dalsze prace, które zaowocowały sformułowaniem dualnego zagadnienia programowania liniowego.

Charnes, Cooper i Rhodes na podstawie dorobku Farrella sformułowali definicje efektywności, zgodne ze stosowanymi przez niego miarami efektywności. Pierwszą definicję nazwali „rozszerzoną definicją efektywności Pareto-Koopmansa", drugą zaś definicją „efektywności względnej".

Definicja 1

Według rozszerzonej definicji Pareto-Koopmansa pełna (100%) efektywność jest osiągnięta przez jednostkę decyzyjną wtedy i tylko wtedy, gdy żadna pozycja zaangażowanych nakładów i uzyskanych efektów nie może być poprawiona bez pogorszenia jakichś innych nakładów lub efektów.

W większości zastosowań odnoszących się do nauk społecznych, teoretycznie osiągalny poziom efektywności nie jest znany. Dlatego definicja zmodyfikowana została przez zaznaczenie jej użyteczności tylko z informacją, że jest osiągalna doświadczalnie, tak jak ma to miejsce w drugiej definicji.

Definicja 2

Efektywność względna — jednostka decyzyjna może być uznana za w pełni efektywną (100%) na podstawie dostępnych danych wtedy i tylko wtedy, gdy działalność innych jednostek nie wykazuje, że jakakolwiek pozycja zaangażowanych przez nie nakładów i uzyskiwanych efektów mogłaby być poprawiona bez pogorszenia jakichś innych nakładów lub efektów.

W kontekście, w którym Koopmans posługiwał się „kryterium Pareta", chodziło o dobra finalne (produkcję), którym przypisał właściwość „ograniczoności" — w ten sposób uznał, że niedozwolona jest żadna „poprawa" w kontekście określonego dobra finalnego, jeśli skutkuje ona „pogorszeniem" sytuacji odnoszących się do innych dóbr finalnych. Popyt na te dobra finalne (*outputs*) miał być zaspokojony w określonej (ustalonej) ilości, podczas gdy nakłady miały być optymalnie określone, odpowiednio do cen i ilości ustalonych egzogenicznie dla każdej pro-

dukcji (każdego dobra finalnego). Szczególna uwaga została skierowana przez Koopmansa na tzw. „ceny efektywne" (czyli ceny efektywnej alokacji zasobów) pozwalające zaspokoić określony popyt na dobra finalne. Zarówno Pareto, jak i Koopmans skoncentrowani byli na analizach odnoszących się do całej gospodarki i w takim ujęciu uzasadnione było, aby ilości i ceny nakładów były determinowane przez odniesienie do ich zdolności do zaspokojenia popytu finalnego.

Farrell rozszerzył podejście Pareta i Koopmansa stosując je zarówno do nakładów, jak i efektów, wyraźnie wystrzegając się jakiegokolwiek stosowania cen i pokrewnych „mechanizmów wymiany". Co ważniejsze, Farrell zastosował takie podejście do oceny działalności określonej jednostki decyzyjnej poprzez porównanie nakładów i efektów właściwych dla tej jednostki z nakładami i efektami właściwymi dla innych, co dawało możliwość empirycznego określenia ich względnej efektywności.

Modyfikacje badawcze Charnesa, Coopera i Rhodesa sprowadzały się zatem do stworzenia takiej postaci modelu, która dawałaby się zastosować w badaniach dotyczących wielu nakładów i wielu rezultatów, co doprowadziło do opracowania dualnej pary programowania liniowego. Zauważyli oni, że miara proponowana przez Farrella nie brała pod uwagę tzw. niezerowych luzów[10] (*non-zero slacks*), które występują wtedy, gdy zmiany w proporcjach związanych z nieefektywnością mieszaną (*mix inefficiency*)[11] zlokalizowane są zarówno po stronie nakładów, jak i rezultatów (występowanie niezerowych luzów jako źródła mix-nieefektywności powinno być uwzględnione nawet wówczas, gdy badanie jest ograniczone do efektywności technicznej[12]).

Kolejny problem, którym zajęli się autorzy, wiązał się z możliwością występowania alternatywnego optimum, w którym ta sama wartość miary Farrella mogłaby być w pewnym optimum związana z zerowym luzem, a w innym nie. Zauważając ten problem Farrell wprowadził do swego modelu tzw. „punkty w nieskończoności" (*points at infinity*), ale nie był w stanie podać formuły, która pozwalałaby na zastosowanie tej koncepcji operacyjnie. Rozwiązania nie przyniosły również prace S. Afriata (1972) oraz R. Shepharda (1970). Autorzy ci, obok Charnesa i Coopera, postrzegani są jako prekursorzy trzech nurtów badań nad efektywnością, zainspirowanych pracami Farrella. Szkoła Afriata obejmuje ekonometryczne (parametryczne) podejście do estymacji granicy efektywności technicznej, natomiast szkoła Shepharda charakteryzuje się aksjomatycznym podejściem do teorii produkcji, głównie za sprawą idei liniowej łamanej funkcji granicznej.

---

[10] Luzy nakładów (s^-) i rezultatów (s^+) to inaczej nadwyżki nakładów i niedobory rezultatów technologii empirycznej określonego podmiotu (DMU) w stosunku do technologii optymalnej.

[11] Z „mix-nieefektywnością" mamy do czynienia wówczas, gdy tylko niektóre (ale nie wszystkie) rezultaty (lub nakłady) są rozpoznane jako wykazujące działanie nieefektywne. Wyeliminowanie mix-nieefektywności związane jest ze zmianą proporcji, w jakich wytwarzane są rezultaty (lub wykorzystywane są nakłady) (Cooper i in., 2007).

[12] „Nieefektywność techniczna" może zostać wyeliminowana bez zmian w proporcjach, w jakich wytwarzane są rezultaty (lub wykorzystywane są nakłady).

Dopiero Charnes, Cooper i Rhodes rozwiązali problem stosując matematyczną koncepcję niearchimedesowego elementu $\varepsilon > 0$ (ε jest elementem mniejszym niż dodatnia liczba rzeczywista) (Arnold i in., 1998)[13], który rozwiązuje problem w ten sposób, że zapewnia maksymalizowanie luzów bez zmiany wartości miary Farrella.

Zadania dualne programowania liniowego mogły być teraz z łatwością zastosowane do rozwiązywania problemów dotyczących wielu nakładów i wielu wyników w taki sposób, że mogły zlokalizować nieefektywność dla każdego nakładu i dla każdego rezultatu w każdej analizowanej jednostce decyzyjnej. Ich prace doprowadziły ostatecznie do sformułowania zadania DEA w postaci podanej jako podstawowy model CCR.

Obecnie DEA obejmuje dużą różnorodność alternatywnych i spokrewnionych podejść do oceny wyników działalności. Rozwinięcia oryginalnego modelu CCR zaowocowały pogłębioną analizą zarówno „mnożnikowego" podejścia w modelu dualnym, jak i podejścia typu „envelopment" w modelu pierwotnym. Należy też podkreślić, że koncepcja „granicy" (*frontier*) jest bardziej uniwersalna niż koncepcja „funkcji produkcji", gdyż dopuszcza istnienie licznych funkcji produkcji z krzywymi granicznymi składającymi się z punktów, które są styczne do granic bardziej efektywnych podmiotów w całej badanej grupie.

MODEL DEA CCR. ZARYS METODOLOGICZNY[14]

W zastosowaniu metody DEA do oceny działalności różnego rodzaju podmiotów przyjęto określenie *Decision Making Unit* (DMU), które odnosi się do oceny każdej jednostki, której działalność sprowadza się do przekształcenia pewnej ilości nakładów *(inputs)* w określoną ilość wyników tej działalności (*outputs/outcomes*). Może zatem dotyczyć wszystkich podmiotów, w przypadku których możliwa jest porównawcza ocena ich działalności.

W większości modeli DEA ustalenie efektywności danego obiektu sprowadza się do rozwiązania liniowego zadania decyzyjnego, w którym postuluje się znalezienie optymalnego sposobu przekształcenia nakładów danego obiektu (DMU) w jego rezultaty, czyli znalezienie „technologii optymalnej". Optymalną technologią jest np. ta, która minimalizując nakłady do poziomu nie wyższego niż empiryczne (autentyczne), pozwala uzyskać rezultaty nie gorsze od empirycznych.

Zakłada się, że jest *n* ocenianych podmiotów — DMU. Każdy podmiot zużywa różną ilość *m* nakładów w celu wyprodukowania *s* różnych produktów (wy-

[13] W artykule Charnesa, Coopera oraz Rhodesa z 1978 r. pt. *Measuring the efficiency of decision making units*, $\varepsilon > 0$ określone zostało jako „non-Archimedean infinitesimal". Czyli $\varepsilon > 0$ jest mniejsze niż jakakolwiek dodatnia liczba rzeczywista, a wynik mnożenia ε przez jakąkolwiek liczbę rzeczywistą $k > 0$ daje wartość $k\varepsilon > 0$, która pozostaje mniejsza niż jakakolwiek liczba rzeczywista. To oznacza, że $\varepsilon > 0$ nie jest liczbą rzeczywistą, ponieważ liczby rzeczywiste posiadają „własności archimedesowe".

[14] Zarys metodologiczny DEA CCR wraz z przykładem zaczerpnięty został z Cooper i in., (2004, s. 8—15).

ników/rezultatów). To znaczy jednostka DMU_j zużywa ilość x_{ij} nakładu *i* produkując ilość y_{rj} produktu *r*, przy założeniu że $x_{ij} \geq 0$ oraz $y_{rj} \geq 0$ oraz że każda DMU wykazuje co najmniej jeden dodatni nakład, jak i wynik. Miarę relatywnej efektywności DEA można przedstawić w formie relacji (stosunku) wyników do nakładów podmiotu DMU*j* = DMU*o* w porównaniu z takimi relacjami dla wszystkich analizowanych jednostek decyzyjnych[15].

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_i} = \frac{u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so}}{v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo}}$$

gdzie:

y_r — ilość rezultatu *r* (dane empiryczne),

u_r — waga przypisana do rezultatu *r* (zmienna optymalizowana, większa lub równa jakiejś nawet minimalnej wartości ε),

r — 1, 2, …, *s*,

x_i — ilość nakładu *i* (dane empiryczne),

v_i — waga przypisana do nakładu *i* (zmienna optymalizowana, większa lub równa jakiejś nawet minimalnej wartości ε),

i — 1, 2, …, *m*.

Konstrukcję modelu CCR można zinterpretować jako uproszczenie (zredukowanie) relacji: wiele wyników/wiele nakładów (dla każdej DMU) do relacji: jeden „wirtualny” wynik/jeden „wirtualny” nakład.

$$u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \ldots + u_s y_{so} = \text{wirtualny rezultat dla DMU}o$$
$$v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \ldots + v_m x_{mo} = \text{wirtualny nakład dla DMU}o$$

Dla określonej DMU stosunek tego jednego „wirtualnego” wyniku do jednego „wirtualnego” nakładu dostarcza miary efektywności, która jest funkcją mnożników. W języku programowania matematycznego relacja ta — a powinna być

[15] Fundamentalne założenie metody DEA mówi, że jeśli mamy danego producenta *A*, który jest w stanie wyprodukować *Y*(*A*) jednostek efektu, przy *X*(*A*) nakładach, to pozostali producenci również powinni osiągnąć te wartości, jeśli działają efektywnie. Jeśli producent *B* jest w stanie wyprodukować *Y*(*B*) jednostek efektu, przy *X*(*B*) nakładach, to również pozostali producenci powinni osiągnąć podobne wartości. Z producentów *A*, *B* i pozostałych można utworzyć producenta, który, mając ich cechy, będzie najbardziej efektywny. Jego nakłady i efekty będą wytworem kombinacji nakładów i efektów producentów *A*, *B* i pozostałych. Jako że taki utworzony producent nie istnieje, to nazywany jest wirtualnym (Dybał, 2004).

ona maksymalizowana — formułuje funkcję celu dla każdej ocenianej DMU, co zapisać można następująco:

$$\max h_o(u,v) = \frac{\sum_r u_r y_{ro}}{\sum_i v_i x_{io}} \tag{1}$$

Oczywiście bez dodatkowych ograniczeń formuła (1) ma nieskończenie wiele rozwiązań. Zestaw normalizujących ograniczeń (po jednym dla każdej DMU) odzwierciedla warunek, że stosunek wirtualnego wyniku do wirtualnego nakładu dla każdej DMU musi być mniejszy lub równy 1[16]. Wówczas zadanie programowania matematycznego może być sformułowane następująco:

funkcja celu:

$$\max h_o(u,v) = \frac{\sum_r u_r y_{ro}}{\sum_i v_i x_{io}} \tag{2}$$

przy ograniczeniach:

$$\frac{\sum_r u_r y_{rj}}{\sum_i v_i x_{ij}} \le 1 \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{oraz} \qquad \frac{u_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}, \ \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \ge \varepsilon > 0$$

$u_r,\ v_i \ge 0$ dla każdego *i* oraz *r*.

Założenie, że ε jest elementem niearchimedesowym mniejszym niż dodatnia liczba rzeczywista gwarantuje, że rozwiązania będą dodatnie dla tych zmiennych. Jednocześnie warunek ten prowadzi do $\varepsilon > 0$ w równaniu (6), które z kolei wykorzystywane jest do optymalizacji „luzów" (*slaks*) w równaniu (10).

Przekształcenie rozwinięte w 1962 r. przez Charnesa i Coopera dla ułamkowej funkcji celu prowadzi do otrzymania ekwiwalentnego zadania programowania liniowego, w którym zamiana zmiennych z (u, v) na zmienne (μ, v) jest rezultatem przekształcenia Charnesa-Coopera (3), dla którego dualne zadanie programowania liniowego ma postać (4):

$$\mu_r = \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \ge \varepsilon > 0, \ r = 1, 2, \ldots, s \qquad v_i = \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \ge \varepsilon > 0, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

[16] Wtedy rozwiązaniem jest wartość miary efektywności danej DMU znormalizowana w przedziale (0,1> oraz wagi prowadzące do określenia tej efektywności. Jeśli jakieś DMU*o* osiągnie efektywność niższą od jedności, to oznacza, że któraś z pozostałych DMU jest bardziej efektywna od DMU*o*, nawet gdy zostały wybrane wagi, które miały maksymalizować efektywność DMU*o*.

Forma mnożnikowa (*multiplier form*)	Forma obwiedniowa (*envelopment form*)
$\max z = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro}$ (3)	$\theta^* = \min \theta$ (4)
przy ograniczeniach:	przy ograniczeniach:
$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0$	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j \le \theta x_{io} \quad i = 1, 2, \ldots, m$
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$	$\sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j \ge y_{ro} \quad r = 1, 2, \ldots, s$
$\mu_r, v_i \ge 0$	$\lambda_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$

Zgodność pomiędzy warunkami ograniczającymi i zmiennymi dla pierwotnego (LP) i dualnego (DLP) zadania programowania liniowego jest zatem następująca (Cooper i in., 2004):

Ograniczenie (LP) Zmienna dualna (DLP)		Ograniczenie (DLP) Zmienna pierwotna (LP)		
$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$	θ	$\theta x_{io} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j \ge 0$	$v_i \ge 0$	
$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0$	$\lambda_j \ge 0$	$\sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j \ge y_{ro}$	$\mu \ge 0$	(4a)

Model (4) nazywany jest czasami „modelem Farrella". W literaturze ekonomicznej nazywane jest to dostosowaniem do założenia o *strong disposal*, ponieważ ignoruje obecność niezerowych „luzów". Natomiast w literaturze badań operacyjnych jest to nazywane „słabą efektywnością" (*weak efficiency*) prawdopodobnie dlatego, że Farrell zrezygnował z wykorzystania silnego dualnego twierdzenia programowania liniowego. To poskutkowało także kalkulacyjnymi problemami, z jakimi zetknął się nie wykorzystując faktu, że modele analizy działalności mogą być przekształcone na ekwiwalentne zadanie programowania liniowego, które bezpośrednio pozwala stosować metodę simplex oraz inne metody efektywnego rozwiązywania takich problemów.

Dzięki dualnemu twierdzeniu programowania liniowego Charnes i Cooper otrzymali równość $z^* = \theta^*$, którą można wykorzystać do rozwiązania równania (4), w celu oszacowania oceny efektywności. Ponieważ można ustalić, że dla $\theta = 1$ i $\lambda_k^* = 1$, przy $\lambda_k^* = \lambda_o^*$ i wszystkich innych $\lambda_j^* = 0$, rozwiązanie równania (4) zawsze istnieje. Wynikają z niego następujące implikacje: rozwiązanie optymalne oznaczone zostało jako $\theta^* \le 1$, ponadto dzięki założeniu o niezero-

wych danych ograniczenie narzuca, że λ jest niezerowa, ponieważ $y_o \geq 0$ oraz $y_o \neq 0$. Stąd θ musi być większe niż zero. Ostatecznie uzyskujemy, że $0 < \theta^* \leq 1$.

Procedurę powtarza się dla każdej DMU*j*, a mianowicie rozwiązuje się równanie (4), przy $(X_o, Y_o) = (X_k, Y_k)$, gdzie (X_k, Y_k) reprezentuje wektory ze składowymi x_{ik}, y_{rk} i podobnie (X_o, Y_o) posiada składowe x_{ok}, y_{ok}. Jednostki decyzyjne, dla których $\theta^* < 1$ są nieefektywne, natomiast DMU, dla których $\theta^* = 1$ są jednostkami granicznymi, czyli efektywnymi.

Niektóre jednostki graniczne mogą jednak charakteryzować się „słabą efektywnością" z powodu niezerowych luzów. Może to budzić niepokój, ponieważ alternatywne optima dla niektórych rozwiązań mogą mieć niezerowe luzy, a inne nie. Jednakże można ominąć ten problem nawet w takich przypadkach poprzez odwołanie się do formuły programowania liniowego, w której luzy są maksymalizowane.

$$\max \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \tag{5}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = \theta^* x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$$

gdzie s_i^-, s_r^+ są zmiennymi luzów, użytymi w celu przekształcenia nierówności w punkcie (4) w równanie ekwiwalentne; zaznaczamy, że zmiany s_i^-, s_r^+ nie wpływają na optymalne θ^*, które jest determinowane przez model (4).

Rozwinięcia te prowadzą do sformułowania definicji opierającej się na definicji „efektywności względnej".

Definicja 3

Efektywność — podejście DEA: działalność jednostki decyzyjnej DMUo jest w pełni efektywna (100%) wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta^* = 1$ *i wszystkie luzy* $s_i^{-*} = s_r^{+*} = 0$.

Definicja 4

Słaba efektywność — podejście DEA: działalność jednostki decyzyjnej DMUo jest słabo efektywna wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta^* = 1$ *i* $s_i^{-*} \neq 0$ *i/lub* $s_r^{+*} \neq 0$ *dla niektórych i oraz r, w niektórych alternatywnych optimach.*

Należy zauważyć, że poprzednie rozwinięcie jest równoznaczne z rozwiązaniem następującego problemu w dwóch etapach:

$$\min \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \tag{6}$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = \theta x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0$$

gdzie s_i^-, s_r^+ są zmiennymi luzów wykorzystanych do przekształcenia nierówności (4) w ekwiwalentne równania.

Jest to rozwiązanie zadania (4) w dwóch etapach — najpierw przez minimalizację θ, a następnie przyjęcie, że $\theta = \theta^*$, tak jak w równaniu (2), gdzie luzy są maksymalizowane bez zmiany poprzednio ustalonej wartości $\theta = \theta^*$. Formalnie jest to równoznaczne przyznaniu priorytetu w określeniu θ^* w równaniu (3). W ten sposób fakt, że element ε zdefiniowany jest jako mniejszy niż jakakolwiek dodatnia liczba rzeczywista jest przyjmowany bez konieczności określenia jej wartości.

Alternatywnie można rozważyć relację wirtualnego nakładu do wyniku. To wymaga reorientacji celu z maksymalizowania na minimalizowanie, tak jak w równaniu (2), aby otrzymać:

$$\min \frac{\sum_i v_i x_{io}}{\sum_r u_r y_{ro}} \tag{7}$$

przy ograniczeniach:

$$\frac{\sum_i v_i x_{ij}}{\sum_r u_r y_{rj}} \geq 1 \text{ dla} \qquad j = 1, \ldots, n$$

u_r, $v_i \geq \varepsilon > 0$ dla każdego *i* oraz *r*.

Ponowne przekształcenie Charnesa-Coopera ułamkowej funkcji celu daje model (8), czyli model mnożnikowy z powiązanym zadaniem dualnym (9), tzw. modelem *envelopment*, tak jak w parze:

$$\min q = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \qquad (8) \qquad \max \phi + \varepsilon(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+)s \qquad (9)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \geq 0$$

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_i y_{ro} = 1$$

$$\mu_r ,\ v_i \geq \varepsilon$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = \phi y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Używamy tu modelu zorientowanego na wynik w porównaniu z modelem zorientowanym na nakład (6). Jednakże, tak jak poprzednio, model (9) rozwiązywany jest w dwóch etapach. Najpierw wyliczamy ϕ^* pomijając „luzy". Następnie optymalizujemy „luzy", ustalając ϕ^* przez rozwiązanie zadania programowania liniowego:

$$\max \sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+ \qquad (10)$$

przy ograniczeniach:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{io} \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = \phi y_{ro} \qquad r = 1, 2, \ldots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Następnie modyfikujemy poprzednią zorientowaną na nakłady definicję efektywności DEA na wersję zorientowaną na wyniki.

Definicja 5

Efektywność — podejście DEA: jednostka decyzyjna DMUo jest efektywna wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^* = 1$, *a* $s_i^{-*} = 0$ *i* $s_r^{+*} = 0$ *dla wszystkich i oraz r.*

Definicja 6

Słaba efektywność — podejście DEA: jednostka decyzyjna DMUo jest słabo efektywna wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi^* = 1$, *a* $s_i^{-*} \neq 0$ *i (lub)* $s_r^{+*} \neq 0$ *dla niektórych i oraz r, w niektórych alternatywnych optimach.*

Tabl. 1 przedstawia zestawienie funkcji celów oraz ograniczeń dla modeli DEA-CCR w wersji zorientowanej na nakłady oraz na wyniki, każda w formie dualnej pary programowania liniowego.

Model DEA-CCR typu „envelopment", uzupełniony o ograniczenie w postaci $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,$ znany jest jako model DEA-BCC. Ograniczenie to skutkuje wprowadzeniem do dualnego zadania mnożnikowego dodatkowej zmiennej μ_o[17]. Ta dodatkowa zmienna powoduje, że możliwe jest szacowanie modelu ze względu na efekty skali (rosnące, stałe, malejące). Taki model nazywany jest też modelem DEA-VRS (*variable returns to scale*), czyli o zmiennych przychodach skali, natomiast pierwotny model CCR nazywany jest też modelem DEA-CRS (*constant returns to scale*), czyli modelem o stałych przychodach skali.

ZESTAWIENIE FUNKCJI CELÓW ORAZ OGRANICZEŃ DLA MODELI DEA-CCR W WERSJI ZORIENTOWANEJ NA NAKŁADY ORAZ NA WYNIKI

Model typu „envelopment"[a]	Model typu mnożnikowego[b]
Model DEA-CCR zorientowany na nakłady	
$\min \theta - \varepsilon(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+)$	$\max z = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro}$
przy ograniczeniach:	przy ograniczeniach:
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = \theta x_{io} \quad i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0$
$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y_{ro} \quad r = 1, 2, \ldots, s$	$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$
$\lambda_j \geq 0$	$\mu_r,\ v_i \geq \varepsilon > 0$

a Model obwiedniowy. *b* Model czynnikowy.

[17] Funkcja celu w modelu mnożnikowym BCC ma wówczas postać: $\max z = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} - \mu_o,$ przy ograniczeniach: $\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \mu_o \leq 0;\ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1;\ \mu_r,\ v_i \geq \varepsilon > 0$ oraz μ_o, które może być dodatnie, ujemne lub równe zero.

ZESTAWIENIE FUNKCJI CELÓW ORAZ OGRANICZEŃ DLA MODELI DEA-CCR W WERSJI ZORIENTOWANEJ NA NAKŁADY ORAZ NA WYNIKI (dok.)

Model typu „envelopment”[a]	Model typu mnożnikowego[b]

Model DEA-CCR zorientowany na wyniki

$\max \phi + \varepsilon(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+)$	$\min q = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}$
przy ograniczeniach:	przy ograniczeniach:
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{io}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \geq 0$
$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = \phi y_{ro}$ $\quad r = 1, 2, \ldots, s$	$\sum_{r=1}^{s} \mu_i y_{ro} = 1$
$\lambda_j \geq 0$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n$	$\mu_r,\ v_i \geq \varepsilon > 0$

a Model obwiedniowy. *b* Model czynnikowy.
Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Ilustracją porównania dwóch podejść badawczych może być przykład, w którym dokonana zostanie ocena efektywności pięciu podmiotów (DMU) zużywających jeden rodzaj nakładów (X) w celu wytworzenia jednego rezultatu (Y).

Przykład

Wielkość nakładów i rezultatów dla pięciu podmiotów (DMU):

Wyszczególnienie	DMU1	DMU2	DMU3	DMU4	DMU5
Nakład X	2	3	9	9	5
Rezultat Y	1	4	6	7	3

Chcemy np. ocenić efektywność podmiotu piątego — DMU5. W tym celu rozwiązujemy następujący model DEA zorientowany na nakłady (CCR-I) i na wyniki (CCR-O):

DEA CCR-I model „envelopment”	DEA CCR-I model mnożnikowy
$\min \theta$ przy ograniczeniach: $2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 9\lambda_4 + 5\lambda_5 \leq 5\theta$ (nakłady) $1\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 + 7\lambda_4 + 3\lambda_5 \geq 3$ (wyniki) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$	$\max z = 3\mu$ przy ograniczeniach: $1\mu - 2v \leq 0$ (DMU1) $4\mu - 3v \leq 0$ (DMU2) $6\mu - 6v \leq 0$ (DMU3) $7\mu - 9v \leq 0$ (DMU4) $3\mu - 5v \leq 0$ (DMU5) $5v = 1\mu,\ v \geq 0$

Oto zestawienie wyników rozwiązań takich zagadnień dla wszystkich DMU:

Rozwiązanie	θ^*	λ^*	Rozwiązanie	z^*	μ^*	v^*
DMU1	3/8	$\lambda_2 = 1/4$	DMU1	3/8	3/8	1/2
DMU2	1	$\lambda_2 = 1$	DMU2	1	1/4	1/3
DMU3	3/4	$\lambda_2 = 3/2$	DMU3	3/4	1/8	1/6
DMU4	7/12	$\lambda_2 = 7/4$	DMU4	7/12	1/12	1/9
DMU5	9/20	$\lambda_2 = 3/4$	DMU5	9/20	3/20	1/5

U w a g a. W przypadku λ^* podano tylko wartości tego współczynnika dla DMU2.

Kalkulacje dostarczają następujących wyników:
efektywnym podmiotem w badanej grupie jest DMU2, dla którego $\phi^* = 1$. Ten sam wynik uzyskujemy stosując metodę mnożnikową ($z^* = 1$);
podmiot piąty DMU5 uzyskał wynik $\phi^* = 9/20$ oraz $\lambda_2 = 3/4$, co oznacza że w porównaniu do podmiotu DMU2 wykazuje efektywność na poziomie 45% i powinien ograniczyć ilość zużywanego nakładu X do poziomu 3/4 wielkości nakładu zużywanego przez podmiot referencyjny DMU2, czyli do poziomu 2,25 (3/4 x 3 = 2,25);
na podstawie wyników uzyskanych w modelu mnożnikowym: $\mu^* = 3/20$ oraz $v^* = 1/5$ można wyznaczyć wartość $h_0(u^*, v^*)$ ułamkowej funkcji celu (2) dla podmiotu DMU5: $h_5(u^*, v^*) = 3\frac{3}{20} : 5\frac{1}{5} = \frac{9}{20}$.

Rozwiązanie omawianego zadania w modelu zorientowanym na wyniki przedstawia zestawienie:

DEA CCR-O model „envelopment”			DEA CCR-O model mnożnikowy			
rozwiązanie	φ^*	λ^*	rozwiązanie	q^*	μ^*	v^*
DMU1	8/3	$\lambda_2 = 2/3$	DMU1	8/3	1	4/3
DMU2	1	$\lambda_2 = 1$	DMU2	1	1/4	1/3
DMU3	4/3	$\lambda_2 = 2$	DMU3	4/3	1/6	2/9
DMU4	12/7	$\lambda_2 = 3$	DMU4	12/7	1/7	4/21
DMU5	20/9	$\lambda_2 = 5/3$	DMU5	20/9	1/3	4/9

Możemy zaobserwować, iż wskaźnik efektywności w modelu zorientowanym na wyniki jest odwrotnością wskaźnika uzyskanego w modelu zorientowanym na nakłady (tzn. $\varphi^* = 1/\theta^*$; $q^* = 1/z^*$).

Badany podmiot jest nieefektywny, gdy wynik optymalnego rozwiązania zadania programowania liniowego jest mniejszy od jedności ($\theta^* < 1$ lub $z^* < 1$).

Natomiast jeśli optymalna wartość jest równa jedności ($\theta^* = 1$ lub $z^* = 1$) oraz jeśli istnieją dodatnie optymalne mnożniki ($\mu^* > 0$; $v^* > 0$), wówczas dana jednostka decyzyjna DMU jest efektywna. Dlatego wszystkie podmioty efektywne leżą na granicy możliwości produkcyjnych (*best practice frontier*).

Jednakże możliwa jest sytuacja, kiedy DMU leży na granicy możliwości produkcyjnych, czyli $\theta^* = 1$, ale nie jest efektywne. Należy tu podkreślić uzupełniające ograniczenie programowania liniowego dotyczące „luzów" (*slackness condition*), które dostarcza warunku efektywności zgodnie z uwagami; ograniczenia obejmujące X_0 oraz Y_0 muszą utrzymać równość $X_0 = X\lambda^*$ oraz $Y_0 = Y\lambda^*$, dla wszystkich optymalnych λ^*, gdzie X_0 i Y_0 są wektorami, a $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ macierzami.

Podmiot nieefektywny może stać się bardziej efektywny przesuwając się na granicę. W modelu zorientowanym na nakłady DMU poprawia swą efektywność poprzez proporcjonalną redukcję nakładów, natomiast model zorientowany na wyniki wymaga proporcjonalnego zwiększenia wyników. Ponadto należy zaznaczyć, że efektywność punktu granicznego jest uzależniona od orientacji modelu.

Podobieństwo rozwiązań uzyskiwanych w obu modelach (CCR-I vs. CCR-O) określa następujące twierdzenie:

niech (θ^*, λ^*) będą optymalnymi rozwiązaniami w modelu zorientowanym na nakłady (9), wtedy ($1/\theta^*$, λ^*/θ^*) = (φ^*, $\hat{\lambda}^*$) jest optymalne dla korespondującego modelu zorientowanego na wyniki.

Podobnie jeśli (φ^*, $\hat{\lambda}^*$) jest optymalne dla modelu zorientowanego na wyniki, wtedy ($1/\varphi^*$, $\hat{\lambda}^*/\varphi^*$) = ($\theta^*$, λ^*) jest rozwiązaniem optymalnym w modelu zorientowanym na nakłady. Podobieństwo dwóch modeli nie musi jednak pozostawać w stosunku 1:1 z powodu możliwości istnienia alternatywnego optimum.

W modelu zorientowanym na nakłady projekcja z $(X_0, Y_0) \rightarrow (\theta^* X_0, Y_0)$ zawsze daje punkt graniczny, ale efektywność techniczna osiągana jest tylko wtedy, gdy wartość wszystkich luzów wynosi zero dla alternatywnych optimum, tzn. gdy $\theta^* X_0 = X\lambda^*$ oraz $Y_0 = Y\lambda^*$ dla wszystkich optymalnych λ^*.

Projekcja zorientowana na wynik $(X_0, Y_0) \rightarrow (X_0, \varphi^* Y_0)$ daje punkt na granicy, który jest technicznie efektywny tylko wtedy, gdy $\varphi^* Y_0 = Y\lambda^*$ oraz $X_0 = X\lambda^*$ dla wszystkich optymalnych λ^*. To znaczy, ograniczenia są spełnione jako równości dla wszystkich alternatywnych rozwiązań optymalnych (4).

Podstawy metodologiczne metody DEA, wykorzystujące techniki programowania liniowego, wraz z konkretnym przykładem kalkulacji i interpretacji wyników uzyskiwanych w trakcie obliczeń stanowią matematyczne odzwierciedlenie teoretycznej koncepcji szacowania efektywności metodą DEA. W praktyce wszystkie obliczenia wykonuje się z wykorzystaniem programów komputerowych, które szacują wybrany model DEA. Programy takie są szeroko dostępne w Internecie zarówno jako produkt komercyjny, jak i udostępniany bezpłatnie,

w zależności od tego, jakie są potrzeby badającego, tzn. jak duża ma być populacja ocenianych DMU.

ZALETY DEA W ANALIZIE EFEKTYWNOŚCI PODMIOTÓW SEKTORA PUBLICZNEGO

W przypadku działań podejmowanych przez sektor publiczny ocena efektywności jest niezmiernie trudna. Dziedziny, na które ponoszone są wydatki publiczne, na ogół nie są podatne na stosowanie precyzyjnych narzędzi pomiaru ich ekonomicznych i społecznych skutków, a nakłady niezbędne do uzyskania pożądanego efektu często są niejednoznaczne, trudne do wydzielenia i kwantyfikowania. Kolejny problem związany z pomiarem poziomu efektywności sektora publicznego wynika z nieistnienia teoretycznie uzasadnionego, wzorcowego poziomu dostarczanych przez sektor publiczny dóbr i usług, który mógłby być uznany za 100% efektywny przy danym poziomie wydatków publicznych. Dlatego problematyka doboru odpowiedniej metody szacowania efektywności w sektorze publicznym należy do najtrudniejszych i najbardziej kontrowersyjnych.

Z tego punktu widzenia istotne wydaje się wskazanie atrybutów metody DEA, które przesądzają o adekwatności tej metody jako narzędzia oceny gospodarności podmiotów działających w ramach specyfiki sektora publicznego:

1. Empiryczna orientacja DEA zakłada brak składnika losowego oraz eliminuje konieczności przyjmowania *a priori* założeń funkcyjnych między analizowanymi zmiennymi i testowania stopnia dopasowania modeli. Dzięki temu jest to doskonałe narzędzie do szacowania efektywności w sferze dostarczania dóbr publicznych, w przypadku których wiedza na temat funkcyjnej zależności między nakładami a wynikami (efektami) często jest niepełna lub niejednoznaczna.
2. DEA pozwala na stosowanie danych o niejednorodnych mianach (nakłady i efekty mogą być wyrażone w różnych jednostkach miary). W przypadku mierzenia efektywności produkcji nierynkowej ma to kapitalne znaczenie, gdyż pozwala pominąć fakt nieistnienia cen rynkowych w przypadku wielu dostarczanych dóbr, jak i zużywanych nakładów.
3. Podstawową charakterystyką modelu DEA jest to, że określona ilość nakładów i efektów sprowadzona zostaje do pojedynczych wielkości „syntetycznego" nakładu i „syntetycznego" efektu, które następnie są wykorzystywane do wyliczenia współczynnika efektywności obiektu. Współczynnik ten jest funkcją celu, którą dla każdego obiektu należy maksymalizować. Zmiennymi optymalizowanymi są współczynniki będące wagami wielkości nakładów oraz efektów, natomiast same wielkości nakładów i efektów są danymi empirycznymi. Metoda ta nie wymaga zatem uprzedniej znajomości wag, gdyż dla każdego badanego obiektu wyszukiwane są wagi maksymalizujące jego efek-

tywność. Z punktu widzenia badania efektywności w sektorze publicznym jest to niezmiernie ważne, gdyż w przypadku produkcji dóbr publicznych często nie istnieje technologiczne lub teoretyczne uzasadnienie wag, jakie należałoby przypisać poszczególnym nakładom w celu uzyskania określonego produktu.

4. DEA jest metodą ukierunkowaną na identyfikację tendencji granicznych. W przeciwieństwie do metod parametrycznych, które próbują dopasować płaszczyznę regresji przez dane „środkowe", DEA konstruuje granicę opartą na danych skrajnych, przez co okazuje się szczególnie odpowiednia do odkrywania wielkości ekstremalnych, które pozostają „niewidoczne" podczas stosowania innych technik. Przy badaniu efektywności w sektorze publicznym jest to szczególnie istotne, aby dokonywać ocen poprzez porównania do *benchmarku,* który jest ustalany na postawie „najlepszych praktyk" i nie legalizuje marnotrawstwa „ukrywając" je w wartościach przeciętnych.
5. DEA pozwala tworzyć modele o wielu nakładach i wielu wynikach i jest metodą, która sprowadza się do badania relacji między produktywnością danego obiektu a produktywnością obiektu efektywnego (granicznego). Wyodrębnienie grupy docelowej (*peers*), czyli grupy podmiotów o efektywności równej 100%, pozwala rekomendować podmiotom, które okazały się w badaniu nieefektywne, wzorce postępowania w celu poprawy efektów ich funkcjonowania. W przypadku produkcji dóbr dostarczanych przez sektor publiczny jest to szczególnie istotne, gdyż daje możliwość wskazania grupy „najlepszych praktyk" i poprawy działalności funkcjonowania badanego podmiotu poprzez naśladownictwo.

WYKORZYSTANIE METODY DEA DO OCENY EFEKTYWNOŚCI WYDATKÓW PUBLICZNYCH NA OCHRONĘ ZDROWIA W NOWYCH KRAJACH CZŁONKOWSKICH UNII EUROPEJSKIEJ

Przedstawione założenia metodologiczne metody DEA oraz jej atrybuty, jako narzędzia szacowania efektywności podmiotów sektora publicznego, pozwalają na sformułowanie modelu, w którym podjęta zostanie próba oceny efektywności wydatków publicznych na ochronę zdrowia w nowych krajach członkowskich Unii Europejskiej (UE). W kontekście opisywanego badania zidentyfikowane zostaną ograniczenia, jakie metoda DEA narzuca na badacza oraz przedstawione zostaną procedury statystycznej weryfikacji danych wykorzystywanych w badaniu.

Według definicji WHO zdrowie to pełnia samopoczucia fizycznego, psychicznego i społecznego i należy je traktować nie jako „brak choroby", lecz jako wartość pozytywną o znaczeniu ekonomicznym w kontekście rozwoju społeczno-ekonomicznego kraju[18]. Ocena stanu zdrowia społeczeństwa nie jest jednak sprawą prostą, a przywołana definicja zawiera elementy wskazujące na trudności pomiaru wynikające z subiektywnej natury badanego zjawiska. Trudności

[18] http://www.who.int/hac/about/definitions/en/.

z ustaleniem adekwatnych mierników pozwalających ocenić potencjał zdrowia społeczeństwa stanowią wyzwanie dla badaczy.

Opisany model szacowania efektywności wydatków publicznych na ochronę zdrowia w 12 nowych krajach członkowskich UE[19] wykorzystuje metodę DEA--CCR zorientowaną na nakłady.

Wybrano kilka cech diagnostycznych, których zadaniem jest jak najlepsze odzwierciedlenie potencjału zdrowia w badanych państwach. Wśród zaproponowanych miar uwzględniono zarówno tzw. wskaźniki „twarde", jak np. śmiertelność niemowląt, jak również mierniki „miękkie", takie jak indeks subiektywnie ocenionych potrzeb uzyskania porad medycznych. W badaniu zastosowano potencjalne cechy diagnostyczne:

1) wskaźnik śmiertelności niemowląt (*Infant mortality, IM*);
2) oczekiwana długość życia w chwili narodzin (*Life expectancy at birth, LE*);
3) wskaźnik niezaspokojonych potrzeb uzyskania porad medycznych/badań lekarskich, z powodu długiej listy oczekujących (*Unmet needs for medical examination, reason: waiting list, UMEW*);
4) wskaźnik niezaspokojonych potrzeb uzyskania porad medycznych/badań lekarskich, gdyż są zbyt drogie (*Unmet needs for medical examination, reason: too expensive, UMEE*);
5) wskaźnik ilości osób przewlekle chorych lub posiadających długotrwałe problemy zdrowotne (*People having a long-standing illness or health problem, LSI*);
6) wskaźnik popełnionych samobójstw w wieku 15—19 i 50—54 (*Suicide death rate, age: between 15—19 and 50—54 years, SDR*);
7) wskaźnik zaspokojenia potrzeb uzyskania porad medycznych (*No unmet needs for medical examination, NNME*).

Wszystkie dane pochodzą ze zbiorów Eurostatu. W badaniu efektywności metodą DEA wykorzystano mierniki efektu (*outputs*), które wyliczono jako średnie arytmetyczne danych z lat 2000—2008 (dla: *IM, LE, SDR*) lub 2004——2008 (dla: *UMEW, UMEE, LSI, NNME*). Jako miernik nakładu (*input*) wykorzystano średnią arytmetyczną wydatków publicznych na ochronę zdrowia w latach 1995—2008, wyrażonych jako % PKB (tabl. 1).

[19] Jednym z ograniczeń metody DEA jest homogeniczność grupy badanych podmiotów (DMU). Zalecenie to nie wymaga szczególnego uzasadnienia, gdyż nawet intuicyjnie oczywiste wydaje się, że należy unikać porównań podmiotów, które działają według innych reguł czy w innym otoczeniu instytucjonalno-prawnym. W badaniu 12 krajów członkowskich UE arbitralnie potraktowane zostało jako grupa jednorodna. Nie dokonana została jednak żadna procedura dyskryminacyjna oparta na metodach ilościowych. Wydaje się jednak, że nie umniejsza to modelu, gdyż ma on na celu egzemplifikację zastosowania DEA w badaniach nad efektywnością sektora publicznego, nie jest natomiast podstawą do wyznaczania kierunków dalszych badań czy formułowania zaleceń dla praktyki gospodarczej. Staranność zachowania homogeniczności badanych DMU, choć teoretycznie niekwestionowana, często w praktyce jest trudna do zrealizowania. Warto tu również zwrócić uwagę na komentarz B. Guzika, który w kwestii doboru DMU wypowiedział się następująco: *Postulat jednorodności zbioru obiektów bardziej wynika z wygody badaczy niż potrzeb praktyki, gdyż pozwala nie zajmować się przypadkami osobliwymi.*

TABL. 1. POTENCJALNE ZMIENNE DIAGNOSTYCZNE DO MODELU SZACOWANIA EFEKTYWNOŚCI (DEA CCR-I)

Wyszczególnienie	Potencjalne zmienne diagnostyczne do modelu DEA							
	rezultaty							nakłady
	NNME	*LE*	*IM*	*UMEW*	*LSI*	*SDR*	*UMEE*	*H_EXP*
Bułgaria	75,75	72,3	11,4	2,3	35,5	19,9	13,8	4,5
Cypr	93,88	79,1	4,4	0,1	49,1	2,0	3,2	2,9
Estonia	89,4	71,9	6,2	4,1	55,8	45,8	2,4	4,4
Litwa	89,84	71,7	7,0	3,3	39,4	89,9	3,4	4,5
Łotwa	73,66	70,9	9,0	2,4	47,8	52,8	12,2	3,7
Malta	97,06	79,1	6,0	0,3	33,0	12,0	1,0	5,3
Polska	84,9	74,7	6,8	2,8	30,3	31,4	5,3	4,5
Republika Czeska	94,38	75,9	3,6	0,3	38,2	30,0	0,3	6,4
Rumunia	85,25	71,8	15,5	0,5	21,2	24,1	10,7	3,5
Słowacja	93,6	74,0	7,0	0,4	32,3	28,4	1,7	5,5
Słowenia	99,6	77,1	3,7	0,1	47,5	50,3	0,1	6,4
Węgry	85,44	72,8	6,9	0,6	40,3	52,7	2,3	5,3
Współczynnik zmienności ω	0,09	0,04	0,46	1,00	0,25	0,64	1,02	0,23

U w a g a. Zacieniowano cechy wyeliminowane z badania z powodu zbyt niskiego współczynnika zmienności.

Ź r ó d ł o: opracowanie własne na podstawie danych Eurostatu.

Zgromadzone dane zostały poddane weryfikacji metodami statystycznymi w celu dyskryminacji cech, które wykazują małe zróżnicowanie w badanej grupie obiektów, eliminacji zmiennych, które prowadziłyby do nadreprezentacji określonych zasobów informacji[20] oraz eliminacji cech, które wykazują brak koincydencji nakładu i efektu. Redukcja ilości zmiennych związana jest też z rygorem procedur DEA, według których łączna ilość zmiennych *output* oraz *input* powinna być równa lub mniejsza niż jedna trzecia liczebności badanej grupy. W tym celu zastosowano procedurę weryfikacji statystycznej:

a) wyeliminowano cechy, dla których wartość bezwzględna współczynnika zmienności była mniejsza niż $\omega = 0{,}1$ (dotyczyło to dwóch mierników — NNME i LE);

[20] Warto tu jednak zauważyć, że w standardowym modelu DEA CCR można badać efektywność, nie martwiąc się numerycznymi skutkami wysokiego skorelowania w obrębie nakładów lub rezultatów. Niemniej wartość poznawcza tak obliczanej efektywności, z uwagi na możliwe jej zmiany dzięki tylko zmianom wyrazu wolnego, jest dyskusyjna. Jeśli standardowe zadanie CCR rozszerzymy o nakład (rezultat) będący liniową kombinacją innych nakładów (rezultatów), ale bez wyrazu wolnego, to rozwiązanie zadania nie zmieni się. Natomiast gdy wyraz wolny jest niezerowy, wtedy rozwiązanie zadania CCR zmienia się wraz ze zmianą wyrazu wolnego.

b) dokonano normalizacji zmiennych metodą przekształcenia ilorazowego[21], w celu uzyskania danych unormowanych w przedziale od zera do jeden[22];
c) wszystkie postulowane w badaniu zmienne rezultatów są destymulantami, dlatego dokonano ich ustymulowienia metodą różnicową (poprzez odjęcie od wartości maksymalnej wynoszącej po znormalizowaniu 1)[23];
d) wyeliminowano ustymulowane zmienne rezultatu, które wykazywały brak koincydencji ze zmienną nakładu (redukcja dotyczyła miernika SDR)[24];
e) dokonano redukcji zmiennych rezultatu z punktu widzenia nadreprezentatywności informacyjnej, dyskryminacji dokonano tzw. metodą parametryczną[25] (progowa wartość współczynnika korelacji ustalona została na poziomie $r = 0{,}7$, a redukcja dotyczyła tylko miernika UMEE).

Należy też zwrócić uwagę na konsekwencje, jakie niesie ze sobą zmiana ilości zmiennych w modelu DEA. B. Guzik zależności te sformułował w sposób następujący:

- w standardowym modelu DEA CCR wraz ze wzrostem liczby rezultatów lub/i nakładów efektywność obiektu nieefektywnego nie pogarsza się (może tylko wzrosnąć),
- natomiast obiekt uznany za efektywny takim pozostaje.

Warto też zauważyć, iż odmiennie niż w przypadku metod statystycznych czy ekonometrycznych, w modelu DEA wysoka korelacja jest wręcz niepożądana, gdyż prowadzi do degeneracji (lub prawie degeneracji) standardowego zadania

[21] Dobór metody normalizacji powinien być dokonany z respektem dla skutków, jakie wnosi do dalszych kalkulacji metodą DEA. Z tego punktu widzenia właściwe jest stosowanie przekształceń, które polegają na tzw. „skalowaniu zmiennej", gdyż nie zmieniają one rozwiązania w standardowym modelu CCR. Oprócz zastosowanej w badaniu metody, w której współczynnikiem skalującym jest „odwrotność wartości maksymalnej", w literaturze można spotkać przykłady stosowania również innych metod normalizacji.

[22] Normalizacji dokonano według formuły $z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} x_{ij}}$, gdzie z_{ij} — wartość znormalizowana cechy x_{ij}. Doboru metody dokonano na podstawie analizy porównawczej metod normalizacji zaprezentowanych w (Młodak, 2006, s. 40), kierując się kryterium uzyskania zmiennych znormalizowanych, które będą nieujemne, a ich wartość maksymalna wyniesie 1. Ponieważ wartości wszystkich cech diagnostycznych analizowanych w niniejszym badaniu są większe od zera, toteż ich wartości znormalizowane mieszczą się w przedziale (0; 1>. Znormalizowanie zmiennych do wartości maksymalnej wynoszącej 1 wykorzystano następnie przy zamianie destymulant w stymulanty metodą różnicową.

[23] Zastosowano różnicową metodę stymulowania, gdyż jak pisze B. Guzik, metoda ta jest lepsza niż przekształcenie poprzez odwrotność, ponieważ jest to przekształcenie liniowe, a zatem nie powoduje „strat" informacji.

[24] Na potrzebę sprawdzania zmiennych nakładu i rezultatu z punktu widzenia ich koincydencji zwraca uwagę B. Guzik (2009), pisząc iż: *(…) nawet jeśli układ nakładów i rezultatów sformułowano w najlepszej wierze, należy za każdym razem sprawdzić (…) postulat ich koincydencji (…) bo dziwna byłaby ekonomia, w której w celu zwiększenia rezultatów należałoby zmniejszać nakłady*.

[25] Zgodnie z procedurą zalecaną w pracy A. Młodaka (2006).

modelu CCR. Silne skorelowanie nakładów z rezultatami nie wpływa korzystnie na poziom efektywności badanych obiektów. Silna korelacja wręcz „zakłóca" ustalanie efektywności według metody CCR[26].

TABL. 2. ZNORMALIZOWANE I STYMULOWANE ZMIENNE DIAGNOSTYCZNE DO MODELU OCENY EFEKTYWNOŚCI (DEA CCR-I)

Wyszczególnienie	Znormalizowane i stymulowane zmienne diagnostyczne do modelu DEA					
	rezultaty					nakłady
	IM(*n*/*s*)	*UMEW*(*n*/*s*)	*LSI*(*n*/*s*)	*SDR*(*n*/*s*)	*UMEE*(*n*/*s*)	*H_EXP*(*n*)
K r a j e						
Bułgaria	0,264	0,454	0,363	0,779	0,000	0,703
Cypr	0,717	0,985	0,119	0,978	0,769	0,448
Estonia	0,598	0,000	0,000	0,490	0,825	0,687
Litwa	0,546	0,209	0,294	0,000	0,754	0,703
Łotwa	0,422	0,427	0,143	0,413	0,116	0,568
Malta	0,616	0,922	0,409	0,866	0,930	0,823
Polska	0,563	0,325	0,457	0,651	0,615	0,700
Republika Czeska	0,768	0,927	0,315	0,667	0,980	1,000
Rumunia	0,000	0,879	0,621	0,732	0,222	0,544
Słowacja	0,550	0,898	0,421	0,685	0,873	0,856
Słowenia	0,764	0,971	0,149	0,441	0,991	0,988
Węgry	0,558	0,845	0,277	0,414	0,831	0,818
Współczynnik zmienności ω	0,41	0,53	0,58	0,44	0,53	0,23
Macierz korelacji						
IM(n/s)	1,000	0,156	–0,578	–0,071	0,818	0,499
UMEW(n/s)	0,156	1,000	0,291	0,511	0,306	0,285
LSI(n/s)	0,578	–0,291	–1,000	–0,259	0,254	–0,038
SDR(n/s)	–0,071	0,511	0,259	1,000	–0,084	–0,186
UMEE(n/s)	0,818	0,306	–0,254	-0,084	1,000	0,596
H_EXP(n)	0,499	0,285	0,038	–0,186	0,596	1,000

U w a g a. Zacieniowano cechy wyeliminowane z badania z powodu braku koincydencji zmiennej rezultatu i nakładu — *SDR* oraz nadreprezentatywności informacyjnej — *UMEE*.

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Ostatecznie w badaniu efektywności wydatków publicznych na ochronę zdrowia metodą DEA zastosowane zostały cechy diagnostyczne: IM, UMEW, LSI. Tabl. 3 przedstawia wyniki kalkulacji przeprowadzone z zastosowaniem programu komputerowego *DEA solver*, dla poszczególnych krajów traktowanych kolejno jako DMU*o*.

[26] Pożądany w ekonometrii przypadek doskonałego skorelowania (i proporcjonalności) w stopniu równym 1 zmiennej zależnej z niektórymi zmiennymi niezależnymi, z punktu widzenia analizy efektywności za pomocą modelu CCR jest bezwartościowy. Oznacza on bowiem całkowity brak zróżnicowania obiektów. Jeśli przynajmniej jeden rezultat jest proporcjonalny do jakiegoś nakładu, to efektywność każdego obiektu jest równa.

TABL. 3. WYNIKI SZACOWANIA EFEKTYWNOŚCI (DEA CCR-I)

Kraje	Wyniki kalkulacji DEA CCR-I									
	współczynnik efektywności i miejsce rankingu		rozwiązania referencyjne				projekcja redukcji nakładu i potencjalnego wzrostu rezultatów po zastosowaniu rozwiązań referencyjnych w %			
	θ	ranking	kraj	λ	kraj	λ	*H_EXP*	*IM*	*UMEW*	*LSI*
Bułgaria	0,633	8	Cypr	0,368	Rumunia	0,515	–36,7	0,0	79,6	0,0
Cypr	1,000	1	Cypr	1,000	x	x	0,0	0,0	0,0	0,0
Estonia	0,544	11	Cypr	0,834	x	x	–45,6	0,0	999,9	999,9
Litwa	0,738	6	Cypr	0,761	Rumunia	0,327	–26,23	0,0	397,1	0,0
Łotwa	0,575	10	Cypr	0,588	Rumunia	0,117	–42,5	0,0	59,6	0,0
Malta	0,793	4	Cypr	0,858	Rumunia	0,493	–20,71	0,0	38,7	0,0
Polska	0,958	3	Cypr	0,784	Rumunia	0,586	–4,23	0,0	296	0,0
Republika Czeska	0,644	7	Cypr	1,071	Rumunia	0,301	–35,7	0,0	42,4	0,0
Rumunia	1,000	1	Rumunia	1,000	x	x	0,0	0,0	0,0	0,0
Słowacja	0,739	5	Cypr	0,766	Rumunia	0,530	–26,1	0,0	36	0,0
Słowenia	0,502	12	Cypr	1,065	Rumunia	0,034	–49,8	0,0	11,2	0,0
Węgry	0,623	9	Cypr	0,777	Rumunia	0,296	–37,7	0,0	21,53	0,0

Ź r ó d ł o: opracowanie własne; kalkulacje wykonano z zastosowaniem *DEA solver*, Springer Science+Business Media, LLc, ©2008.

Na podstawie wyników badania DEA efektywności wydatków publicznych na ochronę zdrowia w grupie 12 nowych krajów członkowskich UE można sformułować takie wnioski:

- Cypr oraz Rumunia wyłonione zostały jako kraje w 100% efektywne, a więc państwa, które swoje rezultaty osiągają przy najniższym poziomie nakładu (wydatki publiczne na ochronę zdrowia kształtują się tam na poziomie odpowiednio 2,9% oraz 3,5% PKB, a więc znacznie mniej niż wynosi mediana dla badanej grupy krajów — 4,5%);
- krajem, który uzyskał ocenę najbliższą liderom jest Polska, ze współczynnikiem efektywności wynoszącym 95,8%;
- Malta, Słowacja, Litwa uzyskały jeszcze ocenę efektywności wyższą niż wynik średni, wynoszący 72,9%;
- na końcu rankingu znalazła się Słowenia, w której poziom efektywności oceniony został zaledwie na 50,2% efektywności liderów.

Zastosowanie modelu DEA CCR-I zorientowanego na nakłady pozwala również na dokonanie projekcji poziomu nakładów dla każdego badanego podmiotu, zapewniającej 100% efektywność, gdyby dany kraj zastosował metody „wytwarzania rezultatu" (technologię), takie jak stosują wyłonieni liderzy. W przypadku Polski uzyskane wyniki można tak zinterpretować, że rekomendowane jest stosowanie 78% (λ = 0,784) technologii (rozwiązań) stosowanych na Cyprze oraz 59% (λ = 0,586) rozwiązań stosowanych w Rumunii.

Kolejne zestawienie wyjaśnia, w jaki sposób kalkulowana jest „optymalna technologia" na podstawie współczynnika intensywności λ (nazywany też *benchmarkowym*) oraz danych z krajów rekomendowanych jako wzorcowe. Ostatnia rubryka pokazuje, w jaki sposób wyliczona została projekcja redukcji nakładów oraz potencjalny wzrost rezultatów po zastosowaniu rozwiązań referencyjnych.

ZESTAWIENIE SPOSOBÓW KALKULOWANIA „OPTYMALNYCH TECHNOLOGII"

Wzorzec	Cypr		Rumunia		Technologia optymalna dla Polski		Technologia empiryczna w Polsce		Technologia optymalna w % technologii empirycznej
waga intensywności λ	0,784		0,586x						
H_EXP	0,4478	+	0,5444	=	0,6704		0,7000		95,77
IM	0,7173		0		0,5626		0,5626		100,00
UMEW	0,9854		0,8786		1,2880		0,3252		396,06
LSI	0,1194		0,6207		0,4575		0,4575		100,00

Ź r ó d ł o: opracowanie własne.

Zastosowanie takiej optymalnej „technologii wytwarzania rezultatu" pozwoliłoby obniżyć nakłady o 4,2%, przy jednoczesnym zachowaniu dotychczasowego poziomu rezultatów wyrażonych miernikami ME i LSI oraz poprawie rezultatu UMEW aż o 296%.

W analogiczny sposób można dokonać interpretacji uzyskanych wyników dla pozostałych krajów badanej grupy.

*
* *

Problematyka badania efektywności w sektorze publicznym wpisuje się w spór o to, co jest ekonomicznie uzasadnione, a co społecznie akceptowalne. Normatywny charakter dyskusji wymaga, aby wszelkie wyniki badań w tej dziedzinie traktowane były z należytą ostrożnością. Wnioski i uogólnienia powinny być formułowane z respektem dla subiektywnych preferencji społeczeństw, które różnią się nie tylko pod względem poziomu rozwoju ekonomicznego i cywilizacyjnego, ale również pod względem mentalnym oraz historycznie i kulturowo ukształtowanych systemów wartości. Należy też zaznaczyć, że szacując efektywność wydatków publicznych na zdrowie metodą DEA, szacuje się efektywność techniczną, która bada, w jakim stopniu wydatkowane środki finansowe zostały transformowane na „potencjał zdrowia" społeczeństwa. Dlatego kraj najbardziej efektywny technicznie to niekoniecznie taki, w którym poziom opieki zdrowotnej jest najwyższy. I odwrotnie, kraj o najniższej efektywności tech-

nicznej nie oznacza najgorszego poziomu opieki zdrowotnej, lecz tylko to, że środki pieniężne nie są w tym kraju wykorzystane efektywnie, tzn. że w innych krajach wykorzystano by je lepiej.

Dlatego wnioski z badania należy traktować jedynie jako przyczynek do dyskusji nad pożądanym kształtem systemu opieki zdrowotnej, pamiętając iż kryterium efektywności nie jest jedynym i nie musi też być przesądzającym. Niemniej jednak, w Polsce potrzeba poszukiwania rozwiązań, które usprawniłyby system ochrony zdrowia wydaje się być bezdyskusyjna. Praktyka gospodarcza — która z jednej strony wymaga reformowania finansów publicznych, z drugiej zaś boryka się z niezadowoleniem społecznym — wymaga, aby podejmowane reformy kryterium efektywności wydatków publicznych traktowały priorytetowo. Z tego punktu widzenia analiza doświadczeń innych krajów może być dobrym punktem odniesienia dla decyzji, które w sposób systemowy miałyby rozwiązywać problem finansowania ochrony zdrowia w naszym kraju.

Z naukowego punktu widzenia każda próba szacowania efektywności podmiotów sektora publicznego wydaje się być cenna. Staje się bowiem zachętą do poszukiwania metod oceny działań, które nie poddają się tradycyjnym sposobom pomiaru i ze względu na swój charakter nie mają wartości rynkowej. Należy oczywiście zaznaczyć, że przy tego rodzaju analizach pokora naukowa badacza wobec ułomności i ograniczeń formułowanych modeli, stosowanych mierników i procedur weryfikacyjnych jest niezmiernie pożądana.

dr Grażyna Kozuń-Cieślak — *Politechnika Radomska*

LITERATURA

Abbott P. M., Doucouliagos C. (2003), *The efficiency of Australian universities: a data envelopment analysis*, „Economics of Education Review", vol. 22 (1)

Adamczyk J., Nitkiewicz T. (2007), *Programowanie zrównoważonego rozwoju przedsiębiorstw*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa

Afonso A., Schuknecht L. (2006), *Public sector efficiency*, Working Papers No. 581, European Central Bank

Afriat S. (1972), *Efficiency estimation of production functions*, „International Economic Review", No. 13

Arnold V., Bardhan I., Cooper W. W., Gallegos A. (1998), *Primal and Dual Optimality in ComputerCodes Using Two-Stage Solution Procedures in DEA*, [w:] „Operational Research Methods, Models and Applications", J. Aronson, S. Zionts (eds.), Westpost, Conn: Quorum Books

Bradley S., Johnes G., Millington J. (2001), *The effect of competition on the efficiency of secondary, schools in England*, „European Journal of Operational Research", vol. 135

Byrnes E. P., Storbeck E. J. (2000), *Efficiency gains from Regionalization: Economic development in China revisited*, „Socio-Economic Planning Sciences", No. 34

Chang L. P., Hwang N. S., Cheng Y. W. (1995), *Using data envelopment analysis to measure the achievement and change of regional development in Taiwan*, „Journal of Environmental Management", No. 43

Charnes A., Cooper W. W., Li S. (1989), *Using data envelopment analysis to evaluate efficiency in the economic performance of Chinese cities*, „Socio-Economic Planning Sciences", No. 23

Charnes A., Cooper W. W., Rhodes E. (1978), *Measuring the efficiency of decision making units*, „European Journal of Operational Research", vol. 2

Cooper W. W., Seiford L. M., Tone K. (2007), *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, 2nd Edition, Springer

Cooper W. W., Seiford L. M., Zhu J. (2004), *Handbook on Data Envelopment Analysis*, Springer (Kluwer Academic Publishers), Boston

Cooper W. W., Seiford L. M., Tone K., Zhu J. (2005), *DEA: past accomplishments and future prospects*, McCOMBS School of Business, McCombs Research Paper Series No. IROM-01-05

Diez-Ticio A., Mancebon M. J. (2002), *The efficiency of the Spanish police service: an application of, the multiactivity DEA model*, „Applied Economics", vol. 34 (3)

Domagała A. (2009), *Zastosowanie metody Data Envelopment Analysis do badania efektywności europejskich giełd papierów wartościowych*, rozprawa doktorska, promotor: prof. dr hab. B. Guzik, Poznań

Drake L., Simper R. (2003), *The measurement of English and Welsh police force efficiency: A comparison of distance function models*, „European Journal of Operational Research", vol. 147 (1)

Dybał M. (2004), *Ocena efektywności przedsięwzięć gospodarczych za pomocą metody DEA*, w: „Ekonomia nr 12", Wydawnictwo Uniwersytetu Wrocławskiego (red. L. Olszewski), Wrocław

Emrouznejad A., Parker B. R., Tavares G. (2008), *Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA*, „Journal of Socio-Economic Planning Science", vol. 42(3)

Farrell M. J. (1957), *The measurement of productive efficiency*, „Journal of the Royal Statistical Society", vol. 120

Giokas D. I. (2001), *Greek hospitals: how well their resources are used*, „OMEGA-International Journal of Management Science", vol. 29 (1)

Gospodarowicz M. (2000), *Procedury analizy i oceny banków*, Departament Analiz i Badań NBP, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 103, Warszawa

Grosskopf S. (2001), Moutray C., *Evaluating performance in Chicago public high schools in the wake of decentralization*, „Economics of Education Review", vol. 20 (1)

Guzik B. (2009), *Postulat koincydencji nakładów i rezultatów w badaniach empirycznych DEA*, w: „Przegląd Statystyczny", tom 56, nr 2, Dom Wydawniczy Elipsa, Warszawa

Halkos G., Tzeremes N. (2005), *A DEA approach to regional development*, Munich Personal RePEc Archive, MPRA Paper, No. 3992

Hughes N. P., Edwards E. M. (2000), *Leviathan vs. Lilliputian: A data envelopment analysis of government efficiency*, „Journal of Regional Science", vol. 40, iss. 4

Karbownik B., Kula G. (2009), *Efektywność sektora publicznego na poziomie samorządu terytorialnego*, NBP, „Materiały i Studia", Zeszyt nr 242, Warszawa

Karkazis J., Thanassoulis E. (1998), *Assessing the effectiveness of regional development policies in Northern Greece using Data Envelopment Analysis*, „Socio-Economic Planning Sciences", No. 32

Kirigia J. M., Emrouznejad A., Sambo L. G., Munguti N., Liambila W. (2004), *Using Data Envelopment Analysis to measure the technical efficiency of public health centers in Kenya*, „Journal of Medical Systems", vol. 28 (2)

Kisielewska M. (2007), *Czy efektywność znajduje odzwierciedlenie w wycenie rynkowej banków w Polsce*, [w:] „Zarządzanie finansami — zarządzanie ryzykiem i kreowanie wartości", (red.) D. Zarzecki, Drukarnia Wydawnicza im. W. L. Anczyca S. A., Szczecin

Koopmans T. C. (1951), *Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities*, [w:] „Activity Analysis of Production and Allocation, Proceedings of Conference", New York

Kundera E. (red.) (2004), *Słownik historii myśli ekonomicznej*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków

Macmillan W. (1986), *The estimation and application of multi-regional economic planning models using data envelopment analysis*, „Papers of the Regional Science Association", vol. 60

Matkowski Z. (red.) (1991), *Laureaci Nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii*, PWN, Warszawa

Mizala A., Romaguera P., Farren D. (2002), *The technical efficiency of schools in Chile*, „Applied Economics", vol. 34 (12)

Młodak A. (2006), *Analiza taksonomiczna w statystyce regionalnej*, Wydawnictwo Difin, Warszawa

Pajor A., Prędki A. (2009), *Estymacja miernika efektywności technicznej w ramach metody DEA*, „Przegląd Statystyczny", nr III—IV

Pina V., Torres L. (2001), *Analysis of the efficiency of local government services delivery. An application to urban public transport*, „Transportation Research Part A-Policy And Practice", vol. 35 (10)

Prieto A. M., ZofIo J. L. (2001), *Evaluating effectiveness in public provision of infrastructure and equipment: The case of Spanish municipalities*, „Journal of Productivity Analysis", vol. 15 (1)

Rogowski G. (1998), *Metody analizy i oceny działalności banku na potrzeby zarządzania strategicznego*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej w Poznaniu, Poznań

Sarkis J. (2007), *Preparing Your Data for DEA*, [in:] *Modeling Data Irregularities and Structural Complexities in Data Envelopment Analysis*, ed. J. Zhu, W. D. Cook, Springer

Sahin I., Ozcan Y. A. (2007), *Public sector hospital efficiency for provincial markets in Turkey*, „Journal of Medical Systems", vol. 24 (6)

Sengupta J. K. (2002), *Economics of efficiency measurement by the DEA approach*, „Applied Economics", vol. 34 (9)

Shephard R. W. (1970), *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton

Steinmann L., Zweifel P. (2003), *On the (in)efficiency of Swiss hospitals*, „Applied Economics", vol. 35 (3)

Steering Committee for the Review of Commonwelth/State Service Provision, Data Envelopment Analysis: A technique for measuring the efficiency of government delivery (1997), AGPS, Canberra

Stępień K. (2004), *Konsolidacja a efektywność banków w Polsce*, Wydawnictwo Fachowe CeDeWu.PL, Warszawa

Sueyoshi T. (1992), *Measuring the industrial performance of Chinese cities by data envelopment analysis*, „Socio-Economic Planning Sciences", vol. 26 (2)

Zamojska A. (2009), *Zastosowanie metody DEA w klasyfikacji funduszy inwestycyjnych*, „Przegląd Statystyczny", nr III—IV

Zere E., McIntyre D., Addison T. (2001), *Technical efficiency and productivity of public sector hospitals in three South African provinces*, „South African Journal of Economics", vol. 69 (2)

Zhu J. (2001), *Multidimensional quality-of-life measure with an application to Fortune's best cities*, „Socio-Economic Planning Sciences", vol. 35

SUMMARY

The article discusses The Data Envelopment Analysis (DEA) Method which is used to estimate expenditure efficiency of public sector units. The paper includes a review of a foreign literature, where are described trials of the method using in international as well as regional and local scales. The DEA Method is discussed in relation to public sector expenditures, such as an activity efficiency of the health service as well as education, mitigating poverty effects and infrastructure developing. The accuracy of the method to estimate the efficiency of public sector units results from its origin. It has been formed as a work result on estimation of activities, which cannot be estimated by traditional methods. The article describes studies which have formulated the basic DEA-CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) method 30 years ago. The DEA methodological bases as well as its attributes are discussed in the article. The paper is ended with an estimation of the public expenditures efficiency for health care in the new EU Member States prepared by the described method.

РЕЗЮМЕ

Статья характеризует метод Data Envelopment Analysis (DEA) используемый для оценки эффективности затрат единиц государственного сектора. В разработке проводится анализ зарубежной литературы, в которой была предпринята попытка использования этого метода в международном, региональном и местном масштабе. Статья представляет использование DEA в области затрат связанных с деятельностью государственного сектора, касающихся эффективности деятельности здравоохранения, образования, борьбы против убожества или развития инфраструктуры. Метод DEA является эффектом работ оценивающих виды деятельности, которые не поддавались традиционным методам. Статья представляет разработки, которые 30 лет тому назад привели к определению основной версии метода DEA-CCR (Charnes, Cooper, Rhodes). Характеризуются также методологические основы DEA и перечень его свойств, которые делают его особенно полезной для оценки эффективности государственного сектора. Статья заканчивается оценкой эффективности государственных затрат на здравоохранение в новых странах членах Европейского союза проведенной в соответствии с представленным методом.