Zeszyty Naukowe nr 680 2005
Akademii Ekonomicznej w Krakowie

Ryszard Węgrzyn

Katedra Analizy Rynku i Badań Marketingowych

Dynamiczne operacje zabezpieczające z wykorzystaniem opcji

1. Wprowadzenie

Na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie warranty znane są już od kilku lat. Od 9 marca 1998 r. przedmiotem obrotu są warranty emitowane przez Bank Rozwoju Eksportu SA. W dniu 20 października 1999 r. Giełda rozpoczęła notowania warrantów kupna i sprzedaży na indeks WIG20, a 24 listopada 1999 r. wprowadziła do obrotu grupę nowych warrantów na akcje polskich spółek giełdowych. W obrocie występowały już także warranty kupna i sprzedaży na indeks TechWIG, warranty na subindeksy sektorowe, warranty na 52-tygodniowe bony skarbowe, a także warranty typu amerykańskiego na kontrakty terminowe na WIG20.

Długie oczekiwanie inwestorów na wejście opcji zostało uwieńczone sukcesem dopiero 22 września 2003 r., kiedy na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie nastąpił debiut opcji na indeks giełdowy WIG20. Do obrotu wprowadzone zostały opcje kupna i sprzedaży, które wygasają w trzeci piątek miesiąca z cyklu kwartalnego – marca, czerwca, września, grudnia.

Celem artykułu jest zatem określenie nowych jakościowo możliwości zastosowania notowanych opcji w strategiach zabezpieczających portfele akcji. W tym wypadku celowe stało się także bliższe zapoznanie wyceny opcji opiewających na indeks kursów akcji.

W wypadku opcji opiewających na indeksy kursów akcji model Blacka-Scholesa w swojej podstawowej formule nie najlepiej spełnia swoją rolę. Dzieje się tak ze względu na dywidendy wypłacane przez spółki, których akcje wchodzą w skład indeksu. O ile w przypadku opcji na akcje pojedynczej spółki można przewidzieć moment wypłaty dywidendy i ewentualnie pominąć jej wielkość, jeżeli opcja wcześniej wygasa, o tyle przy opcjach indeksowych trudno byłoby określić taki moment, gdyż spółki wypłacają dywidendę w różnych terminach.

W tym przypadku zatem istotne staje się wzięcie pod uwagę wypłacanej dywidendy i jej wpływu na wartość opcji. Oznacza to w praktyce stosowanie zmodyfikowanego modelu Blacka-Scholesa uwzględniającego wypłacane dywidendy. Model ten przyjmuje postać[1]:

$$C = e^{-\delta T} SN(d_1) - e^{-rT} EN(d_2),$$

gdzie:

$d_1 = [\ln(S/E) + (r - \delta + ½\sigma^2)T]\sigma\sqrt{T},$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},,$

S – cena instrumentu bazowego,

T – czas do wygaśnięcia,

E – cena wykonania,

r – stopa procentowa wolna od ryzyka,

δ – stopa dywidendy,

σ – zmienność (odchylenie standardowe),

$N(\cdot)$ – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego,

$N'(\cdot)$ – funkcja gęstości rozkładu normalnego: $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-x^2/2}$.

Z kolei określane za jego pomocą miary ryzyka dla opcji kupna wyliczane są następująco:

Delta = $e^{-\delta T} N(d_1)$,

Gamma = $e^{-\delta T} N'(d_1)/S\sigma\sqrt{T}$,

Vega (Kappa) = $e^{-\delta T} S \sqrt{TN'(d_1)}$,

Rho = $e^{-rT} TEN(d_2)$,

gdzie: delta – oznacza zmianę ceny opcji przypadającą na jednostkową zmianę ceny instrumentu bazowego, gamma – to zmiana delta przy jednostkowej zmianie ceny instrumentu bazowego, vega – zmiana ceny opcji przy zmianie zmienności (*volatility*) instrumentu bazowego, rho – zmiana ceny opcji przy zmianie stopy procentowej[2].

[1] R.M. Bookstaber, *Option Replication Technology* [w:] *Advanced Strategies in Financial Risk Management*, red. R.J. Schwartz, C.W. Smith, New York Institute of Finance, New York 1998, s. 180; R. Jarrow, S. Turnbull, *Derivative Securities*, South-Western College Publ., Cincinnati 2000, s. 364.

[2] R. Jarrow, S. Turnbull, *op. cit.*, s. 280.

Podane miary ryzyka opcji znajdują swoje zastosowanie w budowie portfeli zabezpieczonych odpowiednimi pozycjami w zakresie opcji.

2. Zastosowanie metody delta *hedging*

Operacje zabezpieczające portfel akcji przed ryzykiem kursowym mogą mieć różny charakter i wykorzystywać różne opcje indeksowe. Jeśli chodzi o portfele akcji, pojawia się jednak we wszystkich przypadkach konieczność określenia tzw. skorygowanej wartości portfela, którą wylicza się na podstawie wskaźników β dla poszczególnych akcji. Zadanie to nie jest proste, ponieważ powstaje problem wyboru okresu, dla jakiego wskaźnik ten będzie wyliczany. Istotne jest również, aby wskaźniki te określały relację zmian kursów akcji do zmian indeksu giełdowego, na który opiewają wykorzystywane do zabezpieczania opcje indeksowe[3].

Przykładowy sposób określania skorygowanej wartości portfela został przedstawiony w tabeli 1. Portfel ten składa się z akcji trzech spółek o określonych wskaźnikach β. Aby uzyskać skorygowaną wartość portfela, pomnożono ilość akcji każdej spółki przez ich cenę, a następnie przez wskaźnik β. Otrzymane w ten sposób skorygowane wartości akcji poszczególnych spółek po ich zsumowaniu stanowią skorygowaną wartość portfela.

Tabela 1. Wyliczanie skorygowanej wartości portfela akcji

Akcje spółki	Ilość akcji w portfelu	Cena 1 akcji	Wskaźnik β	Skorygowana wartość portfela
GOGO	3000	25	4,00	300 000
UTIL	5000	60	0,80	240 000
OIL	2000	45	2,00	180 000
Razem	–	–	–	720 000

Źródło: opracowanie własne na podstawie: L.G. McMillan, *Options as a Strategic Investment*, New York Institute of Finance, New York 1993, s. 542.

Tak wyliczoną skorygowaną wartość portfela można zabezpieczyć za pomocą indeksowych opcji sprzedaży, indeksowych opcji kupna, jak również wykorzystując jednocześnie obydwa typy opcji indeksowych.

Przy wykorzystaniu obydwu typów opcji można mianowicie utworzyć syntetyczną pozycję sprzedaży indeksowego kontraktu *futures*. Pozycja ta powstanie poprzez jednoczesną sprzedaż opcji kupna i zakup opcji sprzedaży.

---

[3] Z teoretycznego punktu widzenia problem ten można pominąć przyjmując, że struktura portfela akcji odpowiada dokładnie strukturze portfela indeksu giełdowego. Zmiany wartości portfela będą wówczas odpowiadać zmianom indeksu.

Dla przykładu przyjmijmy, że na rynku występują opcje kupna i sprzedaży na indeks UVX, którego aktualny poziom wynosi 175,60 punktów. Mnożnik dla cen opcji wynosi 100, co oznacza, że zmiana ceny o 1 odpowiada 100 jednostkom pieniężnym. Inwestor, chcąc zabezpieczyć skorygowaną wartość portfela 720 000 przed ryzykiem kursowym, powinien przyjąć 41 pozycji sprzedaży opcji kupna i 41 pozycji kupna opcji sprzedaży (720 000/175,60*100). Opcje te powinny posiadać ceny wykonania zbliżone do poziomu indeksu. Utworzona w ten sposób syntetyczna pozycja sprzedaży kontraktu *futures* będzie przynosić zyski przy spadku indeksu (spadku wartości portfela akcji), a straty przy jego wzroście. Zmiany wartości akcji w portfelu będą zatem rekompensowane zmianami wartości pozycji syntetycznej.

Zabezpieczenie portfela akcji przed ryzykiem kursowym z wykorzystaniem opcji *put* może polegać na dwóch rozwiązaniach: częściowym zabezpieczeniu przed spadkami kursów z możliwością osiągnięcia zysku przy ich większym wzroście (*hedging* statyczny) oraz zabezpieczeniu przed bieżącymi zmianami kursów (*hedging* dynamiczny).

Pierwsze rozwiązanie polega na zakupie opcji sprzedaży (najlepiej *out-of-the--money*, które są stosunkowo tanie), aby zyski z tej pozycji rekompensowały straty wynikające ze spadku kursów. Przyjmijmy, że możemy wykorzystać opcje sprzedaży na indeks UVX z ceną wykonania 170 i premią 1. Wartość indeksu wynosi 178,00, a mnożnik 100.

Aby wyliczyć liczbę przyjętych pozycji sprzedaży, należy podzielić skorygowaną wartość portfela (720 000) przez wartość ceny wykonania użytych opcji (170*100):

$$\text{Liczba pozycji kupna} = 720\,000/170*100 = 42{,}3.$$

Koszt zakupu 42 opcji sprzedaży wyniesie 4200. Cenę tę należy traktować jako cenę częściowego zabezpieczenia portfela. Przy spadku kursów inwestor może ponieść straty, przy czym po spadku indeksu poniżej 170 straty nie będą się już pogłębiać z uwagi na wzrost dochodów z przyjętej pozycji. Maksymalny poziom straty może wynieść 5000 [(8 + 42)*100][4].

Zabezpieczenie przed bieżącymi zmianami kursów (*hedging* dynamiczny) z wykorzystaniem opcji sprzedaży polega na takiej konstrukcji portfela akcji i opcji, aby zmiany kursów akcji (indeksu) były w pełni rekompensowane zmianami cen opcji. Do tego celu najczęściej wykorzystuje się wskaźnik delta, który oznacza wielkość zmiany ceny opcji przy jednostkowej zmianie instrumentu bazowego.

[4] L.G. McMillan, *Options as a Strategic Investment*, New York Institute of Finance, New York 1993, s. 544–546.

Dla przykładu przyjmijmy, że w obrocie występują opcje na indeks UVX z ceną wykonania 180 i premią 4,50 oraz oszacowanym wskaźnikiem delta na poziomie –0,60. W tym wypadku liczba pozycji kupna opcji indeksowych będzie wyliczana z wykorzystaniem wcześniejszej formuły, ale z podzieleniem jej wyniku przez wartość bezwzględną wskaźnika delta:

Liczba pozycji kupna = 720 000/(180*100)/0,60 = 67.

Koszt operacji zabezpieczającej wyniesie zatem: 67*4,50*100 = 30 150. W tym przypadku inwestor musi wydać o wiele więcej na zabezpieczenie swojego portfela, ale w ten sposób uzyskuje natychmiastowe zabezpieczenie przed spadkiem kursów. W tym miejscu należy dodać, że konstrukcja portfela w tym rozwiązaniu powinna być na bieżąco modyfikowana w zależności od zmian wskaźnika delta[5].

W wypadku zabezpieczania portfela akcji indeksowymi opcjami kupna w praktyce można mówić tylko o zabezpieczeniu przed bieżącymi zmianami kursów (*hedging* dynamiczny). W odniesieniu do tych opcji zostaną jednak zaprezentowane o wiele bardziej zaawansowane metody zabezpieczeń (*hedgingu*).

Najprostszy sposób, przedstawiony już w odniesieniu do opcji sprzedaży, polega na przyjęciu określonej ilości pozycji sprzedaży opcji kupna. Ilość tych pozycji będzie wyliczona taką samą formułą, tylko ze wskaźnikiem delta dla opcji kupna.

Aby jednak uogólnić prowadzone rozważania, w dalszej części będzie mowa nie o portfelu akcji, ale o indeksie kursów akcji, który odpowiada takiemu portfelowi. Poza tym konstrukcje portfeli będą budowane przy założeniu, że występuje tylko jedna pierwotna pozycja sprzedaży indeksowej opcji kupna. Rozwiązania przedstawione w ten sposób dają się łatwo zastosować dla większych portfeli poprzez agregację odpowiednich składników.

Poszczególne parametry pierwotnej opcji kupna zostały przedstawione w tabeli 2. Podana cena opcji oraz miary ekspozycji (ryzyka) zostały wyliczone na podstawie zmodyfikowanego modelu wyceny opcji Blacka-Scholesa uwzględniającego wypłacane dywidendy. Wielkości te będą brane pod uwagę przy kolejnych prezentowanych metodach *hedgingu* dynamicznego.

Jak pokazuje tabela 2, wskaźnik delta opcji kupna wynosi 0,6245. To oznacza, że udział indeksu (który zastąpił tutaj portfel akcji) w stosunku do opcji powinien wynieść 0,6245. Zatem w budowanym portfelu zabezpieczanym przed ryzykiem kursowym powinna się pojawić jedna opcja kupna oraz 0,6245 jednostki indeksu. Wynik tej operacji zabezpieczającej został przedstawiony w tabeli 3.

[5] *Ibidem*, s. 547.

Tabela 2. Specyfikacja pierwotnej indeksowej opcji kupna

Indeks bazowy	OEX 100
Wrtość indeksu	300
Cena wykonania	300
Stopa procentowa	8,00%
Czas do wygaśnięcia	1 rok
Zmienność indeksu bazowego	18%
Stopa dywidendy	3,00%
Miary ekspozycji:	
– cena opcji kupna	28,25
– delta	0,6245
– gamma	0,0067
– vega (Kappa)	0,0109
– Rho	0,0159

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 167.

Tabela 3. Wynik zastosowanej metody delta *hedging*

Wyszczególnienie	Wartość początkowa	Nowa wartość	Zmiana wartości
A: Zmiana indeksu z 300 do 301			
Opcja kupna	28,25	28,88	0,63
0,6245 indeksu	187,34	187,96	0,62
Błąd	–	–	–0,01
B: Zmiana indeksu z 300 do 310			
Opcja kupna	28,25	34,81	6,56
0,6245 indeksu	187,34	193,58	6,24
Błąd	–	–	–0,32

Źródło: *op. cit.*, s. 169.

Zgodnie z modelem wyceny opcji, wzrost indeksu bazowego z 300 do 301 powoduje wzrost ceny opcji kupna z 28,25 do 28,88. Natomiast pozycja delta zmienia się z 187,34 do 187,96. Różnica w zmianach wartości oznacza, że wystąpił tutaj błąd zabezpieczenia na poziomie 0,01. Błąd ten wynika ze zmiany wskaźnika delta występującego przy zmianie poziomu indeksu. W tym przypadku wzrost indeksu o jeden punkt powoduje zmianę wskaźnika delta z 0,6245 na 0,6311.

Nawet niewielka zmiana indeksu prowadzi do zmiany delta. Stąd wskaźnik ten jest odpowiedni tylko przy małych zmianach na rynku. O ile jednak zmiana indeksu o jeden punkt nie powoduje istotnego błędu zabezpieczenia, to większe zmiany prowadzą do coraz większych odchyleń. Przykład zmiany indeksu o 10 punktów zaprezentowano w tabeli 3 część B.

Odpowiedzią na ten mankament operacji zabezpieczającej jest metoda delta--gamma *hedging*. Wskaźnik gamma jest wielkością, o którą zmienia się delta przy zmianie instrumentu bazowego o jednostkę. Miara ta pozwala zatem na lepsze skonstruowanie portfela z uwzględnieniem zmian wskaźnika delta. Zaznaczyć jednak należy, że wskaźnik gamma też nie jest stały i zmienia się zwłaszcza przy większych zmianach instrumentu bazowego.

3. Zastosowanie metody delta-gamma-vega-rho *hedging*

Dla przykładu w celu zabezpieczenia portfela przed ryzykiem gamma wybrano kolejną opcję kupna opiewającą na ten sam indeks, ale o krótszym terminie wygaśnięcia. Opcja ta posiada większy od opcji pierwotnej wskaźnik gamma na poziomie 0,0148, w przeciwieństwie do 0,0067. Dokładną specyfikację opcji przedstawiono w tabeli 4.

Operacja delta-gamma *hedging* polega na zastosowaniu dwóch kroków. W kroku pierwszym eliminuje się ryzyko gamma, czyli określa udział opcji krótkoterminowej w portfelu oraz wylicza pozostałą wielkość delta. W przykładzie zaprezentowanym w tabeli 5 udział pozycji kupna opcji 3-miesięcznej wyliczono jako stosunek wskaźnika gamma dla opcji pierwotnej do wskaźnika gamma opcji 3-miesięcznej: 0,0067/0,0148 = 0,453. Po ustaleniu odchylenia delta w drugim kroku następuje wprowadzenie do portfela odpowiedniej wielkości indeksu. W ten sposób pozostałe delta i gamma są na poziomie zerowym.

Tabela 4. Specyfikacja opcji kupna z terminem wygaśnięcia za 3 miesiące

Indeks bazowy	OEX 100
Wartość indeksu	300
Cena wykonania	305
Stopa procentowa	8,00%
Czas do wygaśnięcia	3 miesiące
Zmienność indeksu bazowego	18%
Stopa dywidendy	3,00%
Miary ekspozycji	
– cena opcji kupna	10,02
– delta	0,4952
– gamma	0,0148
– vega (kappa)	0,0059
– Rho	0,0034

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 169.

Tabela 5. Kroki w operacji delta-gamma *hedging*

Wyszczególnienie	Delta	Gamma	Vega	Rho
Krok 1. Eliminacja ekspozycji gamma				
Pierwotna opcja kupna	0,6245	0,0067	0,0109	0,0159
0,453 opcji kupna 3-miesięcznej	0,2245	0,0067	0,0027	0,0015
Pozostała ekspozycja	0,400	0	0,0082	0,0144
Krok 2. Eliminacja ekspozycji delta				
0,400 indeksu	0,400	0	0	0
Pozostała ekspozycja	0	0	0,0082	0,0144

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 170.

Tabela 6. Wyniki zastosowania metody delta-gamma *hedging*

Wyszczególnienie	Wartość początkowa	Nowa wartość	Zmiana wartości
A: Zmiana indeksu z 300 do 301			
Pierwotna opcja kupna	28,25	28,88	0,63
0,453 opcji kupna 3-miesięcznej	4,54	4,77	0,23
0,400 indeksu	120,00	120,40	0,40
Błąd	–	–	0
B: Zmiana indeksu z 300 do 310			
Pierwotna opcja kupna	28,25	34,81	6,56
0,453 opcji kupna 3-miesięcznej	4,54	7,11	2,57
0,400 indeksu	120,00	124,00	4,00
Błąd	–	–	0,01
C: Zmiana indeksu z 300 do 310 oraz spadek stopy procentowej o 100 punktów bazowych			
Pierwotna opcja kupna	28,25	33,05	4,80
0,453 opcji kupna 3-miesięcznej	4,54	6,91	2,37
0,400 indeksu	120,00	124,00	4,00
Błąd	–	–	1,57

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 171.

W tabeli 6 zostały przedstawione rezultaty zastosowania operacji delta-gamma *hedging*. Jak można zauważyć, przy zmianie indeksu o jednostkę błąd zabezpieczenia wynosi tym razem 0, a przy zmianie o 10 jednostek – 0,01. Oznacza to znacznie skuteczniejsze zabezpieczenie portfela przed ryzykiem kursowym, zwłaszcza przy większych zmianach na rynku.

Należy jednak pamiętać, że na relacje cenowe mają wpływ także pozostałe czynniki uwzględnione w modelu Blacka-Scholesa. Takim czynnikiem jest niewątpliwie stopa procentowa. W tabeli 6 część C przedstawiono wynik zastosowania metody delta-gamma *hedging* przy założeniu, że poza zmianą indeksu dochodzi do spadku stopy procentowej o 100 punktów bazowych. Stopa spada zatem z 8% do 7%. Zróżnicowane terminy wygaśnięcia opcji powodują zróżnicowaną zmianę w kosztach posiadania tych opcji, a tym samym różną reakcję ich cen. Cena opcji pierwotnej z terminem wygaśnięcia jednego roku spada o 1,76, cena 3-miesięcznej opcji obniża się natomiast o 0,20. W tym przypadku zmiany wartości poszczególnych składników portfela nie równoważą się, a błąd zabezpieczenia wynosi 1,57.

Tak jak w odniesieniu do błędu zabezpieczenia wynikającego z ryzyka gamma wykorzystano instrument zabezpieczający, którego cena zmienia się wraz ze zmianą tego ryzyka, czyli 3-miesięczną opcję kupna, tak i w tym przypadku należy posłużyć się takim instrumentem, który pozwoli zabezpieczyć błąd wynikający ze zmiany stopy procentowej, czyli instrumentem z ekspozycją na stopę procentową. Instrumentem wybranym w tym przykładzie został procentowy kontrakt terminowy typu *futures* opiewający na obligację skarbową. Ponieważ wszystkie opcje mają określoną wrażliwość na zmianę stopy procentowej (rho), instrumentem takim mogłaby być także następna opcja. Specyfikacja kontraktu *futures* została przedstawiona w tabeli 7.

Tabela 7. Specyfikacja kontraktu terminowego typu *futures*

Instrument bazowy	Obligacja
Stopa procentowa	8,00%
Miary ekspozycji: – cena – delta – gamma – vega – Rho	 92,00 0 0 0 –0,01[a]

[a] oznacza zmianę o 1 w wartości *futures* na 100 punktów bazowych zmiany w stopie procentowej

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 172.

Najbardziej istotną cechą tego kontraktu z punktu widzenia *hedgingu* jest to, że jego cena zależy od stopy procentowej (rho równe –0,01), natomiast pozostałe miary: delta, gamma, vega są równe zeru. Ta cecha oznacza, że w celu dodatkowego zabezpieczenia portfela przed ryzykiem stopy procentowej można postąpić tak, jak to robiono wcześniej, dodając kolejny krok polegający na przyjęciu odpowiedniej pozycji w zakresie kontraktu *futures*. Rodzaj strategii zabezpieczającej w ten sposób portfel przed ryzykiem delta, gamma i rho określany jest jako delta-gamma-rho *hedging*. Kolejność kroków w tej strategii została zaprezentowana w tabeli 8.

Tabela 8. Kroki w operacji delta-gamma-rho *hedging*

Wyszczególnienie	Delta	Gamma	Vega	Rho
Krok 1. Eliminacja ekspozycji gamma				
Pierwotna opcja kupna	0,6245	0,0067	0,0109	0,0159
0,453 opcji kupna 3-miesięcznej	0,2245	0,0067	0,0027	0,0015
Pozostała ekspozycja	0,4000	0	0,0082	0,0144
Krok 2. Eliminacja ekspozycji delta				
0,400 indeksu	0,4000	0	0	0
Pozostała ekspozycja	0	0	0,0082	0,0144
Krok 3. Eliminacja ekspozycji rho				
–1,44 kontraktu *futures*	0	0	0	–0,0144
Pozostała ekspozycja	0	0	0,0082	0

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 173.

Wyniki zastosowania procentowego kontraktu *futures* w zabezpieczeniu portfela zostały pokazane w tabeli 9. Błąd zabezpieczenia obniżył się ponad 10-krotnie, do zaledwie 0,13. Przyjęta pozycja sprzedaży kontraktu *futures* w ilości 1,44 spowodowała rekompensatę zmian cen opcji wynikających ze spadku stopy procentowej o 100 punktów bazowych.

Do tej pory zabezpieczano portfel przed zmianami cen instrumentu bazowego oraz poziomu stopy procentowej. Następnym obszarem jest zabezpieczenie portfela przed ryzykiem zmienności (*volatility*), czyli vega *hedging*. Skoro wykorzystano jeden instrument zabezpieczający do delta *hedgingu*, dwa do delta-gamma *hedgingu*, a trzy do delta-gamma-rho *hedgingu*, do operacji delta-gamma-vega-rho *hedgingu* potrzebne są cztery instrumenty. Ponieważ gamma i vega są ściśle opcyjnymi charakterystykami, co najmniej dwoma instrumentami zabezpieczającymi muszą być opcje.

Tabela 9. Wyniki zastosowania metody delta-gamma-rho *hedging*. Zmiana indeksu z 300 do 310 oraz spadek stopy procentowej o 100 punktów bazowych

Wyszczególnienie	Wartość początkowa	Nowa wartość	Zmiana wartości
Pierwotna opcja kupna	28,25	33,05	4,80
0,453 opcji kupna 3-miesięcznej	4,54	6,91	2,37
0,400 indeksu	120,00	124,00	4,00
–1,44 kontraktu *futures*	–132,48	–133,92	–1,44
Błąd	–	–	0,13

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 173.

Jeżeli poza opcją pierwotną zostanie wykorzystany instrument bazowy (indeks kursów akcji) oraz trzy opcje, pozwoli to na zastosowanie układu czterech równań określających związki pomiędzy poszczególnymi instrumentami – jedno równanie do każdej miary ryzyka, które należy zabezpieczyć. Równania te zostały przedstawione w tabeli 10. W tablicy tej W_0 oznacza wagę dla instrumentu bazowego, W_1, W_2, W_3 natomiast wagi dla opcji wykorzystanych w *hedgingu*. Subskrypt T odnosi się do opcji pierwotnej, C oznacza cenę opcji kupna, a S – wartość instrumentu bazowego. Po wprowadzeniu wszystkich wielkości do układu równań rozwiązaniem stają się wagi poszczególnych instrumentów w portfelu.

Tabela 10. Układ czterech równań

Zabezpieczenie delta $W_0 + W_{1\Delta 1} + W_2 + \Delta_2 + W_{3\Delta 3} = \Delta_T$
Zabezpieczenie gamma $W_{1\Gamma} + W_{2\Gamma 2} + W_{3\Gamma 3} = \Gamma_T$
Zabezpieczenie vega (kappa) $W_{1\Gamma 1}(t_1 - t_T) + W_{2\Gamma 2}(t_2 - t_T) + W_{3\Gamma 3}(t_3 - t_T) = 0$
Zabezpieczenie rho $W_1(\Delta_1 - C_1/S)(t_1 - t_T) + W_2(\Delta_2 - C_2/S)(t_2 - t_T) + W_3(\Delta_3 - C_3/S(t_3 - t_T) = 0$

Uwaga: t_1, t_2, t_3 – nie mogą wszystkie być sobie równe

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 174.

Dla przykładu wybrano trzy opcje kupna, których dokładne specyfikacje zostały podane w tabeli 11. Opcje te mają różne ceny wykonania, a jedna z nich ma także inny termin wygaśnięcia. Wszystkie natomiast muszą oczywiście opiewać na ten sam instrument bazowy, jakim jest przykładowy indeks kursów akcji.

Tabela 11. Specyfikacja zastosowanych opcji kupna

Wyszczególnienie	Opcja kupna 1	Opcja kupna 2	Opcja kupna 3
Indeks bazowy	jak w opcji pierwotnej	jak w opcji pierwotnej	jak w opcji pierwotnej
Cena wykonania	295	305	300
Czas do wygaśnięcia	3 miesiące	3 miesiące	6 miesięcy
Stopa procentowa	8%	8%	8%
Zmienność indeksu	18%	18%	18%
Stopa dywidendy	3%	3%	3%
Miary ekspozycji			
Cena	15,29	10,02	18,59
Delta	0,6398	0,4954	0,5931
Gamma	0,0138	0,0148	0,0100
Vega	0,0055	0,0059	0,0080
Rho	0,0044	0,0034	0,0079

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit*., s. 176.

Wyniki zastosowania operacji delta-gamma-vega-rho *hedging* zostały podane w tabeli 12. W portfelu poza opcją pierwotną znalazły się: 0,212 indeksu bazowego, –1,900 opcji kupna z ceną wykonania 295 i 3-miesięcznym terminem wygaśnięcia, 0,838 opcji kupna z ceną wykonania 305 i 3-miesięcznym terminem wygaśnięcia, 2,042 opcji kupna z ceną wykonania 300 i 6-miesięcznym terminem wygaśnięcia. Jak pokazuje tabela 12, operacja zabezpieczająca prowadzi do błędu na poziomie zaledwie 0,09, przy wzroście indeksu o 10 punktów, wzroście stopy procentowej o 100 punktów bazowych oraz wzroście zmienności o 6 punktów procentowych.

Tabela 12. Wyniki zastosowania metody delta-gamma-vega-rho *hedging*. Zmiana indeksu z 300 do 310, wzrost stopy procentowej o 100 punktów bazowych i wzrost zmienności do 24%

Wyszczególnienie	Wartość początkowa	Nowa wartość	Zmiana wartości
Pierwotna opcja kupna	28,25	42,81	14,56
0,212 indeksu bazowego	63,60	65,72	2,12
–1,900 opcji kupna z ceną wykonania 295	–29,05	–48,97	–19,92
0,838 opcji kupna z ceną wykonania 305	8,40	16,42	8,02
2,042 opcji kupna z ceną wykonania 300	37,97	62,22	24,25
Błąd	–	–	–0,09

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit*., s. 175.

Dla porównania w tabeli 13 przedstawiono wyniki zastosowania w takich samych warunkach operacji delta *hedging*. W portfelu znalazły się: pierwotna opcja kupna oraz 0,6245 indeksu bazowego. W wyniku podanych wcześniej zmian na rynku cena opcji wzrosła o 14,56, przy zmianie indeksu tylko o 6,25. Stąd błąd zabezpieczenia w tym wypadku wyniósł aż 8,31.

Problem zabezpieczania się przed ryzykiem vega nie jest jednak do końca taki prosty. Zmienność implikuje bowiem zmiany cen wszystkich instrumentów, a kosz operacji zabezpieczającej przed zmiennością zależy od ceny instrumentu, czasu do wygaśnięcia i samej zmienności, jaka występuje w tym czasie. Dlatego też ryzyko narzucane przez zmiany zmienności nie może być do końca wyeliminowane. Sytuacja ta nie powinna jednak dziwić, skoro model wykorzystywany do określania relacji cenowych z góry zakłada, że poziom zmienności jest znany.

Tabela 13. Wyniki zastosowania metody delta *hedging* w tych samych warunkach. Zmiana indeksu z 300 do 310, wzrost stopy procentowej o 100 punktów bazowych i wzrost zmienności do 24%

Wyszczególnienie	Wartość początkowa	Nowa wartość	Zmiana wartości
Pierwotna opcja kupna	28,25	42,81	14,56
0,6245 indeksu	187,34	193,60	6,25
Błąd	–	–	–8,31

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 175.

W przedstawionych rozważaniach została pominięta jedna znana miara ryzyka opcji – theta, która określa wpływ czasu na zmiany ceny opcji. Powodem był tutaj fakt, że ryzyko theta jest ściśle powiązane z ryzykiem gamma. Operacje zabezpieczające przed ryzykiem delta i gamma jednocześnie zabezpieczają przed ryzykiem theta.

4. Zakończenie

W celu właściwego zarządzania ryzykiem bardzo ważną umiejętnością jest dezagregacja ryzyka i znajomość poziomu ryzyka rezydualnego czy ryzyka nie wyjaśnionego. Wiedząc, że błędy zabezpieczenia są powiązane z konkretnymi parametrami, można bowiem zwrócić baczniejszą uwagę na to konkretne źródło ryzyka. Można funkcjonować z określonym poziomem ryzyka zmiany parametrów, jeżeli dobrze pojmuje się ich zachowania długookresowe. Jeżeli natomiast błąd zabezpieczenia nie może zostać zidentyfikowany, nie sposób określić, jakie zagrożenie się pojawi.

Z uwagi na fakt, że największy poziom ryzyka pochodzi od zmian instrumentu bazowego oraz zmian zmienności (*volatility*), warto zwrócić uwagę na potencjalne straty wynikające z tych zmian. W tabelach 14 i 15 zostały zawarte przykładowe poziomy błędów zabezpieczeń, jakie pojawiają się przy delta *hedgingu* oraz delta-gamma *hedgingu*.

W tabelach 14 i 15 przedstawiono błędy zabezpieczenia przy założeniu, że wyjściowy poziom indeksu wynosi 300, a wyjściowa zmienność kształtuje się na poziomie 18%. Patrząc na tabele, można zaobserwować różnice w błędach przy określonych poziomach indeksu i zmienności. Dla przykładu, jeżeli indeks bazowy rośnie o 10% do 330, a zmienność z 18% do 24%, delta *hedging* przynosi błąd zabezpieczenia równy 8,22, natomiast delta-gamma *hedging* – 5,56. Należy oczywiście pamiętać, że te operacje zabezpieczające nie zabezpieczają przed zmianą zmienności, stąd skok zmienności może prowadzić do niespodziewanych zmian błędów zabezpieczeń.

Tabela 14. Poziomy błędów zabezpieczeń przy zastosowaniu delta *hedgingu*

Poziom indeksu	Poziom zmienności		
	12%	poziom wyjściowy 18%	24%
270	2,73	–3,26	–9,45
275	4,05	–2,24	–8,61
280	5,08	–1,42	–7,92
285	5,82	–0,79	–7,38
290	6,29	–0,35	–6,97
295	6,47	–0,08	–6,70
300	6,40	0,00	–6,56
305	6,09	–0,08	–6,56
310	5,57	–0,32	–6,67
315	4,84	–0,71	–6,89
320	3,94	–1,24	–7,24
325	2,89	–1,90	–7,69
330	1,72	–2,67	–8,22

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 178.

Przy omawianiu poszczególnych strategii zabezpieczających pominięto kilka istotnych kwestii. Przede wszystkim ograniczono się tylko do jednorazowego określania struktury portfela, bez uwzględniania konieczności jej ciągłego nadzoru oraz potrzebnych działań korygujących. Korekty takie są niezbędne wraz ze zmianami indeksu oraz pozostałych parametrów. Decyzje te są istotne, biorąc pod uwagę z jednej strony możliwość wystąpienia większych błędów zabezpieczenia, a z drugiej koszty transakcji przy korektach portfela. Zignorowano także trudności przy właściwym określaniu parametrów modelu, zwłaszcza poziomu zmienności. Założono w końcu, że poszczególne wielkości wyliczane na podstawie zmodyfikowanego modelu Blacka-Scholesa są właściwe.

Tabela 15. Poziomy błędów zabezpieczeń przy zastosowaniu delta-gamma *hedgingu*

Poziom indeksu	Poziom zmienności		
	12%	poziom wyjściowy 18%	24%
270	5,54	–0,45	–6,64
275	6,04	–0,25	–6,62
280	6,38	–0,12	–6,62
285	6,57	–0,04	–6,63
290	6,62	–0,01	–6,63
295	6,55	0,00	–6,62
300	6,40	–0,00	–6,56
305	6,17	0,00	–6,48
310	5,89	0,01	–6,34
315	5,56	0,01	–6,17
320	5,19	0,01	–5,99
325	4,80	0,01	–5,78
330	4,38	–0,01	–5,56

Źródło: opracowanie własne na podstawie: R.M. Bookstaber, *op. cit.*, s. 179.

Mimo tych zastrzeżeń, jak się wydaje, zaprezentowane metody zabezpieczania portfela akcji mogą być w praktyce bardzo użyteczne, w szczególności na rozwiniętych rynkach opcji. Zastosowanie poszczególnych rozwiązań na rynku polskim musi zostać poprzedzone pogłębionymi badaniami empirycznymi. Niezbędna jest analiza porównawcza kształtowania się cen opcji oraz określonych wartości modelowych. Wraz z rozwojem tego rynku z pewnością jednak opcje będą lepiej wyceniane, a tym samym zastosowanie metod *hedgingu* będzie bardziej skuteczne.

Literatura

Bodie Z., Kane A., Marcus A.J., *Investments*, Irwin Inc., Boston 1993.

Bookstaber R.M., *Option Replication Technology* [w:] *Advanced Strategies in Financial Risk Management*, red. R.J. Schwartz, C.W. Smith, New York Institute of Finance, New York 1998.

Haugen R.A., *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa 1996.
Hull J., *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-Press, Warszawa 1997.
Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, PWN, Warszawa 1996.
Jarrow R., Turnbull S., *Derivative Securities*, South-Western College Publ., Cincinnati 2000.
Kolb R.W., *Financial Derivatives*, New York Institute of Finance, New York 1993.
McMillan L.G., *Options as a Strategic Investment*, New York Institute of Finance, New York 1993.

Dynamic Security Operations using Options

In this article, the author draws attention to new, qualitative opportunities to use options in strategies to hedge share portfolios. These opportunities have appeared since options were introduced to public trade on the WIG20 index.

Using examples, the author presents the use and effectiveness of the following methods: delta hedging, delta-gamma hedging, delta-gamma-rho hedging and delta-gamma-vega--rho hedging. The author signals, however, that thorough empirical analysis must be conducted before using such approaches on the Polish market. A comparative analysis of option prices and defined model values is essential. As the market develops, options will certainly be better valuated and therefore the application of hedging methods will be more effective.