Paweł Dykas, Armen Edigarian, Tomasz Tokarski
Uniwersytet Jagielloński

UOGÓLNIENIE *N*-KAPITAŁOWEGO MODELU WZROSTU GOSPODARCZEGO NONNEMANA-VANHOUDTA

Streszczenie: W prezentowanym opracowaniu znajduje się uogólnienie modelu wzrostu Nonnemana-Vanhoudta. Szczególny przypadek neoklasycznej funkcji produkcji, jaką jest funkcja produkcji Cobba-Douglasa, jest zastąpiony ogólną neoklasyczną funkcją produkcji. Ponadto w opracowaniu wykazano, że w tak sformułowanym modelu wzrostu gospodarczego istnieje punkt stacjonarny modelu typu Nonnemana-Vanhoudta. Punkt ten wyznacza stabilne, długookresowe rozwiązanie analizowanego modelu wzrostu gospodarczego. W opracowaniu bada się także ekonomiczne właściwości owego punktu równowagi.

Słowa kluczowe: wzrost gospodarczy, matematyczne modele wzrostu gospodarczego, układy równań różniczkowych.

Wprowadzenie[1]

N-kapitałowy model wzrostu gospodarczego Nonnemana-Vanhoudta [1996] stanowi uogólnienie neoklasycznych modeli wzrostu gospodarczego Solowa [1956] oraz Mankiwa-Romera-Weila [1992]. W modelu Solowa analizuje się długookresową równowagę jednokapitałowego modelu gospodarki (z kapitałem rzeczowym), w modelu Mankiwa-Romera-Weila – dwukapitałowego modelu gospodarki (z kapitałem rzeczowym i ludzkim), a w modelu Nonnemana-Vanhoudta – równowagę *N*-kapitałowego modelu gospodarki (z dowolnym zbiorem *N* zasobów kapitałowych). W modelu tym rozważa się gospodarkę, w której:

[1] Autorzy dziękują profesorowi Krzysztofowi Maladze z Katedry Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu za uwagi do wstępnej wersji prezentowanego opracowania.

– proces produkcyjny jest opisany przez funkcję produkcji typu Cobba-Douglasa [1928], w której wielkość produkcji jest zależna od nakładów *N* różnych zasobów kapitału oraz od jednostek efektywnej pracy[2],
– przyrost każdego z zasobów kapitału jest różnicą pomiędzy inwestycjami w ów zasób oraz jego deprecjacją,
– stopy inwestycji oraz stopy deprecjacji kolejnych zasobów kapitałów mają charakter zmiennych egzogenicznych[3],
– jednostki efektywnej pracy rosną według stopy wzrostu równej sumie stopy harrodiańskiego postępu technicznego i stopy wzrostu liczby pracujących.

W oryginalnym opracowaniu Nonnemana-Vanhoudta [1996] analizuje się jedynie punkt stacjonarny układu równań różniczkowych (wynikającego z przyjętych tam założeń[4]) oraz ekonometrycznie szacuje się parametry długookresowej równowagi owego modelu dla grupy krajów OECD.

1. Model

1.1. Założenia modelu

W prowadzonych dalej rozważaniach będą przyjmowane następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki w długim okresie[5]:

• Proces produkcyjny opisuje uogólniona, neoklasyczna, (N+1)-czynnikowa funkcja produkcji dana wzorem:

$$\forall t \in [0, +\infty) \quad Y(t) = F\left(K_1(t), K_2(t), \ldots, K_N(t), E(t)\right), \tag{1}$$

gdzie Y jest strumieniem wytworzonego w gospodarce produktu, K_1, K_2, …, K_N oznacza nakłady kolejnych zasobów kapitału[6], a E to jednostki efektywnej

[2] Alternatywne podejście do równowagi Nonnemana-Vanhoudta, przy funkcji produkcji CES, można znaleźć w pracy Sulimy [2010].

[3] Skutki uchylenia założenia o egzogenicznym charakterze stóp inwestycji, na gruncie pewnego modelu optymalnego sterowania, badane są w pracy Tokarskiego [2007].

[4] Dowód stabilności owego punktu stacjonarnego jest przedstawiony w opracowaniu [Dykas, Sulima i Tokarski 2008].

[5] O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych będzie *implicite* przyjmowane założenie, że są różniczkowalnymi funkcjami czasu $t \in [0, +\infty)$. Zapis $\dot{x}(t) = \dot{x} = dx/dt$ będzie oznaczał pochodną zmiennej x po czasie t, czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości zmiennej x w momencie t.

[6] Zasobami tymi mogą być zarówno różne rodzaje kapitału rzeczowego, jak i kapitału infrastrukturalnego (związanego z rozwojem infrastruktury ekonomicznej), kapitału ludzkiego, kapitału społecznego etc.

pracy. O funkcji produkcji (1) zakłada się, że (por. też [Tokarski 2008, podpunkt 1.4.2]):

– dziedziną tej funkcji jest zbiór:

$$D_F = \left\{ \left(K_1, K_2, \ldots, K_N, E \right) \in \Re^{N+1} : K_1 \geq 0 \wedge K_2 \geq 0 \wedge \ldots \wedge K_N \geq 0 \wedge E \geq 0 \right\},$$

– funkcja F jest przynajmniej dwukrotnie różniczkowalna w D_F[7];
– dla każdego $K_1 = 0$, lub $K_2 = 0$, lub … $K_N = 0$, lub $E = 0$ zachodzi:

$$F\,(K_1, K_2, \ldots, K_N, E) = 0, \tag{2}$$

co oznacza, że do wytworzenia strumienia produktu jest niezbędny zarówno każdy z N zasobów kapitału, jak i nakłady efektywnej pracy,
– spełnione są zależności:

$$\forall K_1, K_2, \ldots, K_N, E > 0 \quad \lim_{K_1 \to +\infty} F\left(K_1, K_2, \ldots, K_N, E\right) = \lim_{K_2 \to +\infty} F\left(K_1, K_2, \ldots, K_N, E\right) =$$
$$= \ldots = \lim_{K_N \to +\infty} F\left(K_1, K_2, \ldots, K_N, E\right) = \lim_{E \to +\infty} F\left(K_1, K_2, \ldots, K_N, E\right) = +\infty, \tag{3}$$

skąd płynie wniosek, że bardzo dużym (dążącym do $+\infty$) nakładom jednego z $N+1$ analizowanych czynników produkcji, przy niezerowych nakładach pozostałych czynników, towarzyszy bardzo duży (dążący do $+\infty$) strumień wytworzonego produktu,
– funkcja produkcji (1) charakteryzuje się malejącą produkcyjnością krańcową każdego z $N+1$ czynników produkcji, a zatem przy $K_1, K_2, \ldots, K_N, E > 0$:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, N \qquad \frac{\partial F}{\partial K_i} > 0 \;\wedge\; \frac{\partial F}{\partial E} > 0 \tag{4}$$

oraz[8]:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, N \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial K_i^2} < 0 \;\wedge\; \frac{\partial^2 F}{\partial E^2} < 0, \tag{5}$$

– spełnione są warunki Inady, czyli przy $K_1, K_2, \ldots, K_N, E > 0$ zachodzą równania:

[7] Pierwsze dwa założenia nie mają bezpośredniej interpretacji ekonomicznej.

[8] Nierówności (5) nie są niezbędne w prowadzonych dalej analizach dotyczących stabilności równowagi uogólnionego modelu Nonneman-Vanhoudta.

$$\forall i = 1, 2, ..., N \qquad \lim_{K_i \to 0^+} \frac{\partial F}{\partial K_i} = +\infty \wedge \lim_{E \to 0^+} \frac{\partial F}{\partial E} = +\infty \tag{6}$$

oraz

$$\forall i = 1, 2, ..., N \qquad \lim_{K_i \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial K_i} = 0 \wedge \lim_{E \to +\infty} \frac{\partial F}{\partial E} = 0 \tag{7}$$

co wraz z nierównościami (4) i (5) prowadzi do wniosku, że jeśli nakłady któregoś z czynników produkcji rosną od 0 do $+\infty$, przy stałych, dodatnich nakładach pozostałych czynników produkcji, to krańcowy produkt owego czynnika produkcji spada od $+\infty$ do 0,

– funkcja produkcji (1) jest jednorodna stopnia pierwszego, czyli – ekonomicznie rzecz biorąc – występują stałe efekty skali procesu produkcyjnego, a zatem:

$$\begin{aligned} &\forall \left(K_1, K_2, \dots, K_N, E\right) \in D_F \wedge \zeta > 0 \\ &F\left(\zeta K_1, \zeta K_2, \dots, \zeta K_N, \zeta E\right) = \zeta F\left(K_1, K_2, \dots, K_N, E\right). \end{aligned} \tag{8}$$

- Tak jak w oryginalnym modelu Nonnemana-Vanhoudta przyrost każdego z zasobów kapitału $\dot{K}_i$ jest różnicą pomiędzy inwestycjami w zasób $s_i Y$ a jego deprecjacją $\delta_i K_i$. Dlatego zachodzą następujące równania różniczkowe:

$$\forall t \in [0, +\infty) \wedge i = 1, 2, ..., N \qquad \dot{K}_i(t) = s_i Y(t) - \delta_i K_i(t), \tag{9}$$

gdzie s_i to stopa inwestycji w i-ty zasób kapitału, δ_i jest stopą deprecjacji owego zasobu. O stopach tych zakłada się, że (po pierwsze) są zmiennymi egzogenicznymi w rozważanym modelu wzrostu gospodarczego, że (po drugie) dla każdego $i = 1, 2, \dots, N$, $s_i, \delta_i \in (0, 1)$ oraz że (po trzecie) $\sum_{i=1}^{N} s_i \in (0,1)$.

- Jednostki efektywnej pracy E, będące iloczynem egzogenicznej technologii A i liczby pracujących L, rosną według stopy wzrostu $\mu > 0$, która jest sumą stopy harrodiańskiego postępu technicznego $g > 0$ i stopy wzrostu liczby pracujących $n > 0$. Dlatego też:

$$\forall t \in [0, +\infty) \quad \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} = \mu \tag{10}$$

lub, co na jedno wychodzi:

$$\forall t \in [0, +\infty) \qquad \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \tag{11}$$

oraz

$$\forall t \in [0, +\infty) \qquad \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n. \tag{12}$$

1.2. Punkt stacjonarny i jego stabilność

Niech

$$\forall t \in [0, +\infty) \qquad y(t) \equiv \frac{Y(t)}{(Lt)} \tag{13}$$

oraz

$$\forall t \in [0, +\infty) \wedge i = 1, 2, ..., N \qquad k_i(t) \equiv \frac{K_i(t)}{L(t)} \tag{14}$$

oznaczają (odpowiednio) wydajność pracy (y) i zasób i-tego kapitału na pracującego (k_i), a:

$$\forall t \in [0, +\infty) \qquad y_E(t) \equiv \frac{Y(t)}{E(t)} \tag{15}$$

oraz

$$\forall t \in [0, +\infty) \wedge i = 1, 2, ..., N \qquad k_{Ei}(t) \equiv \frac{K_i(t)}{E(t)} \tag{16}$$

to produkt na jednostkę efektywnej pracy (y_E) i kolejne zasoby kapitału na jednostkę owej pracy (k_{Ei}).

Z równań (1) i (8) oraz podstawień (15) i (16) wynika, że zachodzi związek:

$$\forall t \in [0, +\infty) \qquad y_E(t) = F\left(k_{E1}(t), k_{E2}(t), \ldots, k_{EN}(t), 1\right),$$

który można zapisać także następująco:

$$\forall t \in [0, +\infty) \qquad y_E(t) = f\left(k_{E1}(t), k_{E2}(t), \ldots, k_{EN}(t)\right). \tag{17}$$

Funkcja (17) jest nazywana funkcją produkcji w postaci intensywnej. Opisuje ona zależności, które zachodzą pomiędzy nakładami kolejnych zasobów kapitału na jednostkę efektywnej pracy a wielkością produktu na jednostkę owej pracy. Z właściwości funkcji produkcji (1) wynika, że funkcja f charakteryzuje się następującymi właściwościami (por. odpowiednie właściwości funkcji produkcji F):

(i) jej dziedziną jest zbiór

$$D_f = \left\{ \left(k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN} \right) \in \Re^N : k_{E1} \geq 0 \wedge k_{E2} \geq 0 \wedge k_{EN} \geq 0 \right\},$$

(ii) funkcja f jest przynajmniej dwukrotnie różniczkowalna w D_f,

(iii) dla każdego $\left(k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN} \right) \in D_f$ spełnione są równania

$$f\left(0, k_{E2}, \ldots, k_{EN}\right) = f\left(k_{E1}, 0, \ldots, k_{EN}\right) = \ldots = f\left(k_{E1}, k_{E2}, \ldots, 0\right) = 0,$$

(iv) przy $k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN} > 0$ zachodzi

$$\begin{aligned} \lim_{k_{E1} \to +\infty} f\left(k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN}\right) &= \lim_{k_{E2} \to +\infty} f\left(k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN}\right) = \ldots = \\ &= \lim_{k_{EN} \to +\infty} f\left(k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN}\right) = +\infty, \end{aligned}$$

(v) dla każdego $k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN} > 0$ spełnione są nierówności

$$\forall i = 1, 2, ..., N \qquad \frac{\partial f}{\partial k_{Ei}} > 0 \ \wedge \ \frac{\partial^2 f}{\partial k_{Ei}^2} < 0,$$

(vi) zachodzą warunki Inady, czyli przy $k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN} > 0$:

$$\forall i = 1, 2, ..., N \qquad \lim_{k_{Ei} \to 0^+} \frac{\partial f}{\partial k_{Ei}} = +\infty \ \wedge \ \lim_{k_{Ei} \to +\infty} \frac{\partial f}{\partial k_{Ei}} = 0.$$

Różniczkując tożsamości (16) względem czasu $t \in [0, +\infty)$ uzyskuje się

$$\forall t \in [0, +\infty) \wedge i = 1, 2, ..., N \qquad \dot{k}_{Ei}(t) = \frac{\dot{K}_i(t)E(t) - K_i(t)\dot{E}(t)}{\left(E(t)\right)^2} = \frac{\dot{K}_i(t)}{E_i(t)} - \frac{\dot{E}(t)}{E(t)} k_{Ei}(t),$$

a stąd i ze związku (10) wynika, że

$$\forall t \in [0, +\infty) \wedge i = 1, 2, ..., N \qquad \dot{k}_{Ei}(t) = \frac{\dot{K}_i(t)}{E_i(t)} - \mu k_{Ei}(t)$$

bądź po uwzględnieniu równań (9) oraz tożsamości (15) i (16):

$$\forall t \in [0, +\infty) \wedge i = 1, 2, ..., N \qquad \dot{k}_{Ei}(t) = s_i y_E(t) - (\mu + \delta_i) k_{Ei}(t). \tag{18}$$

Wstawiając funkcję produkcji w postaci intensywnej (17) do równań różniczkowych (18) okazuje się, że można je zapisać następująco:

$$\forall t \in [0, +\infty) \wedge i = 1, 2, ..., N$$
$$\dot{k}_{Ei}(t) = s_i f\left(k_{E1}(t), k_{E2}(t), \ldots, k_{EN}(t)\right) - (\mu + \delta_i) k_{Ei}(t). \tag{19}$$

Układ równań różniczkowych (19) wyznacza układ równań ruchu uogólnionego modelu Nonnemana-Vanhoudta. Układ ów interpretuje się ekonomicznie w ten sposób, że przyrost każdego z zasobów kapitału na jednostkę efektywnej pracy $\left(\dot{k}_{Ei}\right)$ jest równy różnicy pomiędzy inwestycjami w ten zasób kapitału na jednostkę efektywnie pracy $\left(s_i f\left(k_{E1}, k_{E2}, \ldots, k_{EN}\right) = s_i \frac{Y}{E}\right)$ a jego ubytkiem $(\mu + \delta_i) k_{Ei}$, które wynika zarówno z deprecjacji tegoż kapitału ($\delta_i k_{Ei}$), jak i ze wzrostu jednostek efektywnej pracy (μk_{Ei}).

W punkcie stacjonarnym układu równań różniczkowych (czyli przy $\dot{k}_{E1} = \dot{k}_{E2} = \ldots = \dot{k}_{EN} = 0$, a więc w punkcie $\left(k_{E1}^*, k_{E2}^*, \ldots, k_{EN}^*\right) \in D_f$, zachodzą związki:

$$\forall i = 1, 2, ..., N \quad s_i f\left(k_{E1}^*, k_{2N}^*, \ldots, k_{EN}^*\right) - (\mu + \delta_i) k_{Ei}^* = 0,$$

które, przy $k_{E1}^*, k_{E2}^*, \ldots, k_{EN}^* > 0$, prowadzą do następującego układu równań[9]:

$$\forall i = 1, 2, ..., N \qquad \frac{f\left(k_{E1}^*, k_{E2}^*, \ldots, k_{EN}^*\right)}{k_{Ei}^*} - a_i = 0, \tag{20}$$

gdzie dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ jest $a_i = \frac{\mu + \delta_i}{s_i} > 0$.

Szukamy $a > 0$ takiego, że $f\left(\frac{a}{a_1}, \frac{a}{a_2}, \ldots, \frac{a}{a_N}\right) = a$. Wówczas dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$, $k_{Ei}^* = \frac{a}{a_i}$ jest rozwiązaniem układu równań (20).

[9] Powyższy układ równań ma także rozwiązanie trywialne $k_{E1}^* = k_{E2}^* = \ldots = k_{EN}^* = 0$. Rozwiązanie to będzie jednak pomijane w prowadzonych dalej analizach, gdyż przy $k_{E1}^* = k_{E2}^* = \ldots = k_{EN}^* = 0$ również $y_E^* = 0$, co prowadzi do wniosku, że przy $E > 0$ także strumień produktu Y jest równy 0 i jest to mało interesujące z makroekonomicznego punktu widzenia.

Zauważmy, że dla pewnego $a > 0$ zachodzi równość $f\left(\frac{a}{a_1}, \frac{a}{a_2}, \ldots, \frac{a}{a_N}\right) = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi związek: $F\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_N}, \frac{1}{a}\right) = 1$, który wynika z jednorodności stopnia pierwszego funkcji produkcji F.

Z właściwości produkcji F (a dokładnie z warunków Inady) wiemy, że

$$\lim_{a\to 0^+} F\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to +\infty} F\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, a\right) = +\infty$$

oraz

$$\lim_{a\to +\infty} F\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a}\right) = \lim_{a\to 0^+} F\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}, a\right) = 0.$$

Zatem z ciągłości funkcji F wynika, że istnieje $a_0 > 0$ takie, że

$$F\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_N}, \frac{1}{a_0}\right) = 1. \tag{21}$$

Z warunku $\frac{\partial F}{\partial t} > 0$ wynika również jedyność prezentowanego tu rozwiązania.

W celu pokazania stabilności punktu $k_E^* = \left[k_{E1}^*, k_{E2}^*, \ldots, k_{EN}^*\right]$ rozważmy funkcję Lapunowa daną wzorem

$$V(x) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \left(x_i - k_{Ei}^*\right)^2,$$

gdzie: $x = \left[x_1, x_2, \ldots, x_N\right]$ oraz $\forall i = 1, 2, \ldots, N$ jest $\beta_i = \frac{1}{s_i} \cdot \frac{df}{dk_{Ei}}\left(k_E^*\right) > 0.$ W celu wykazania stabilności prezentowanego wcześniej rozwiązania wystarczy pokazać, że

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^{N} \beta_i \left(s_i f(x) - \left(\mu + \delta_i\right) x_i\right)\left(x_i - k_{Ei}^*\right) < 0$$

dla wszystkich x w otoczeniu k_E^*, różnych od k_E^*. Ze wzoru Taylora wynika, że dla x w otoczeniu k_E^* zachodzi związek:

$$f(x) = f\left(k_E^*\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(k_E^*\right)\left(x_i - k_{Ei}^*\right) + \varphi\left(\left|x - k_E^*\right|\right),$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza taką funcję, że $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)=0$. Wtedy

$$\eta(x)=\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i s_i\left(x_i-k_{Ei}^*\right)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(k_E^*\right)\left(x_i-k_{Ei}^*\right)\right)+$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\beta_i\left(\mu+\delta_i\right)\left(x_i-k_{Ei}^*\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\beta_i s_i\left(x_i-k_{Ei}^*\right)\varphi\left(\left|x-k_E^*\right|\right).$$

Zgodnie z definicją b_i dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ zachodzi równość: $\beta_i s_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(k_E^*\right)$.

Wystarczy zatem wykazać, że

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i s_i\left(x_i-k_{Ei}^*\right)\right)^2<\sum_{i=1}^{N}\beta_i\left(\mu+\delta_i\right)\left(x_i-k_{Ei}^*\right)^2$$

dla x różnych od k_E^*. Z nierówności (4) – czyli z tego, że $\frac{\partial F}{\partial E}(x)>0$ dla dowolnego x – wynika, iż:

$$\sum_{i=1}^{N}k_{Ei}^*\frac{\frac{\partial f}{\partial k_{Ei}}\left(k_E^*\right)}{f\left(k_E^*\right)}<1,$$

czyli

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta_i s_i^2}{\mu+\delta_i}<1.$$

Wykażemy teraz prosty lemat. Niech $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N > 0$ będą takie, że $\sum_{i=1}^{N}\gamma_i<1$. Wtedy dla dowolnego $x\in\Re^N$ takiego, że $x \neq 0$, zachodzi

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i x_i\right)^2<\sum_{i=1}^{N}\gamma_i x_i^2.$$

Dowód tego lematu wynika z nierówności Schwarza, gdyż wówczas

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i x_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\gamma_i x_i^2<\sum_{i=1}^{N}\gamma_i x_i^2.$$

Stosując zaś ów lemat mamy

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i s_i\left(x_i-k_{Ei}^*\right)\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta_i s_i^2}{\mu+\delta_i}\cdot\frac{\mu+\delta_i}{s_i}\left(x_i-k_{Ei}^*\right)\right)^2<\sum_{i=1}^{N}\beta_i\left(\mu+\delta_i\right)\left(x_i-k_{Ei}^*\right)^2.$$

1.3. Ekonomiczne właściwości długookresowej równowagi

Z równań (13)–(16) oraz założenia III wynika, że wydajność pracy (y) oraz kolejne zasoby kapitału na pracującego (k_i dla każdego i = 1, 2, …, N) można zapisać następująco:

$$\forall t\in[0,+\infty)\qquad y(t)=A(t)y_E(t)$$

oraz

$$\forall t\in[0,+\infty)\wedge i=1,2,...,N\quad k_i(t)=A(t)k_{Ei}(t).$$

Z powyższych zależności oraz równania (11) płynie wniosek, że

$$\forall t\in[0,+\infty)\qquad \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}=g+\frac{\dot{y}_E(t)}{y_E(t)} \tag{22}$$

oraz

$$\forall t\in[0,+\infty)\wedge i=1,2,...,N\qquad \frac{\dot{k}_i(t)}{k_i(t)}=g+\frac{\dot{k}_{Ei}(t)}{k_{Ei}(t)}. \tag{23}$$

Związki (22) i (23) interpretuje się ekonomicznie w ten sposób, że stopa wzrostu wydajności pracy $\dot{y}/y$ (stopy wzrostu kolejnych nakładów kapitału na pracującego $\dot{k}_i/k_i$) jest (są) sumą stopy harrodiańskiego postępu technicznego g oraz stopy wzrostu produktu na jednostkę efektywnej pracy $\dot{y}_E/y_E$ (stóp wzrostu kolejnych zasobów kapitału na jednostkę efektywnej pracy $\dot{k}_{Ei}/k_{Ei}$).

Ponieważ w warunkach równowagi uogólnionego modelu Nonnemana-Vanhoudta, czyli w punkcie k_E^*, zachodzą równości $\dot{k}_1=\dot{k}_2=\ldots=\dot{k}_N=0$, zatem stąd oraz z zależności (23) płynie wniosek, że w punkcie tym stopy wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego $\dot{k}_i/k_i$ (dla i = 1, 2, …, N) są równe– podobnie jak w oryginalnym modelu Nonnemana-Vanhoudta – stopie postępu technicznego w sensie Harroda.

Różniczkując zaś funkcję produkcji w postaci intensywnej (17) względem czasu $t \in [0, +\infty)$ uzyskujemy

$$\forall t \in [0, +\infty) \quad \dot{y}_E(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial k_{Ei}} \dot{k}_{Ei}(t). \tag{24}$$

Z równania (24) wyciągnąć można wniosek, że w warunkach równowagi Nonnemana-Vanhoudta również $\dot{y}_E = 0$, co w połączeniu z równaniem (22) implikuje, iż wówczas stopa wzrostu wydajności pracy $\dot{y} / y$ jest równa g.

Różniczkując kolejne równania układu równań (20) względem s_i (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$) i dokonując kilku elementarnych przekształceń uzyskujemy

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} \right) = \frac{\mu + \delta_1}{s_1} \cdot \frac{\partial k_{E1}^*}{\partial s_i}, \\
\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} \right) = \frac{\mu + \delta_2}{s_2} \cdot \frac{\partial k_{E2}^*}{\partial s_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} \right) = \frac{\mu + \delta_{i-1}}{s_{i-1}} \cdot \frac{\partial k_{Ei-1}^*}{\partial s_i}, \\
\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} \right) = \frac{\mu + \delta_i}{s_i} \cdot \frac{\partial k_{Ei}^*}{\partial s_i} - \frac{f\left(k_E^*\right)}{s_i}, \\
\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} \right) = \frac{\mu + \delta_{i+1}}{s_{i-1}} \cdot \frac{\partial k_{Ei+1}^*}{\partial s_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} \right) = \frac{\mu + \delta_N}{s_N} \cdot \frac{\partial k_{EN}^*}{\partial s_i},
\end{array}\right\} \tag{25}$$

gdzie dla każdego $j = 1, 2, \ldots, N$, $\overline{f}_j = \frac{\partial f}{\partial k_{Ej}}\left(k_E^*\right)$. Z równań (24) i podstawień $a_i = \frac{\mu + \delta_i}{s_i} > 0$ wynika, że dla każdego $j \neq$ i zachodzi:

$$\frac{\partial k_{Ei}^*}{\partial s_j} = \frac{a_i \frac{\partial k_{Ei}^*}{\partial s_i} - \frac{f\left(k_E^*\right)}{s_i}}{a_j}. \tag{26}$$

Wstawiając związek (26) do i-tego równania układu (25) otrzymujemy

$$\frac{\partial k_{Ei}^*}{\partial s_i}=\frac{\frac{f\left(k_E^*\right)}{s_i}\left(\sum_{j=1\wedge j\neq i}^{N}\frac{\overline{f}_j}{a_j}-1\right)}{a_i\left(\sum_{j=1\wedge j\neq i}^{N}\frac{\overline{f}_j}{a_j}-1\right)+\overline{f}_i}=\frac{f\left(k_E^*\right)}{s_i a_i}\cdot\frac{\sum_{j=1\wedge j\neq i}^{N}\varepsilon_j^*-1}{\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j^*-1}>0, \tag{27}$$

gdzie dla każdego i = 1, 2, …, N, $\varepsilon_i^*=\frac{\partial f}{\partial k_{Ei}^*}\cdot\frac{k_{Ei}^*}{f\left(k_E^*\right)}$ to elastyczności funkcji produkcji w postaci intensywnej f względem zasobu i-tego kapitału na jednostkę efektywnej pracy k_{Ei}^*[10]. Zatem wzrost stopy inwestycji s_i w i-ty zasób kapitału

[10] Z jednorodności makroekonomicznej funkcji produkcji (1) oraz z twierdzenia Eulera o funkcji jednorodnej wynika, że zachodzi związek:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial F\left(K_1,K_2,\ldots,K_N,E\right)}{\partial K_i}K_i+\frac{\partial F\left(K_1,K_2,\ldots,K_N,E\right)}{\partial E}E=F\left(K_1,K_2,\ldots,K_N,E\right),$$

co implikuje zależność

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\left(K_1,K_2,\ldots,K_N,E\right)+\varepsilon_E\left(K_1,K_2,\ldots,K_N,E\right)=1,$$

gdzie:

$$\forall i=1,2,...,N\quad \varepsilon_i\left(K_1,K_2,\ldots,K_N,E\right)=\frac{\partial F\left(K_1,\ldots,K_N,E\right)}{\partial K_i}\cdot\frac{K_i}{F\left(K_1,\ldots,K_N,E\right)}>0,$$

$$\varepsilon_E\left(K_1,K_2,\ldots,K_N,E\right)=\frac{\partial F\left(K_1,\ldots,K_N,E\right)}{\partial E}\cdot\frac{E}{F\left(K_1,\ldots,K_N,E\right)}>0$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i<1.$$

Stąd i ze związku

$$\frac{\partial f\left(k_{E1},\ldots,k_{EN},1\right)}{\partial k_{Ei}}=\frac{\partial F\left(K_1,\ldots,K_N,E\right)}{\partial k_{Ei}}=\frac{\partial F\left(K_1,\ldots,K_N,E\right)}{\partial K_i}$$

otrzymujemy w szczególności

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i^*<1,$$

gdzie dla każdego i = 1, 2, …, N, $\varepsilon_i^*=\varepsilon_i\left(k_E^*\right)$.

prowadzi do wzrostu zasobu i-tego kapitału na jednostkę efektywnej pracy k_{Ei}^*, a i-ty kapitał na pracującego wchodzi na wyżej położoną ścieżkę wzrostu gospodarczego[11].

Wstawiając związek (27) do równania (26) dostajemy

$$\frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} = \frac{f\left(k_E^*\right)}{s_i a_j} \cdot \frac{\varepsilon_i^*}{1 - \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j^*} > 0. \tag{28}$$

Z równania (28) płynie wniosek, że wzrost stopy inwestycji w i-ty zasób kapitału prowadzi do wzrostu j-tego ($j \neq i$) zasobu kapitału na jednostkę efektywnej pracy k_{Ej}^*, co oznacza iż j-ty zasób kapitału na pracującego również wchodzi na wyżej położoną ścieżkę wzrostu gospodarczego.

Różniczkując równania (20) względem δ_i (dla $i = 1, 2, \ldots, N$) otrzymujemy

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i}\right) = \dfrac{\mu+\delta_1}{s_1} \cdot \dfrac{\partial k_{E1}^*}{\partial \delta_i}, \\
\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i}\right) = \dfrac{\mu+\delta_2}{s_2} \cdot \dfrac{\partial k_{E2}^*}{\partial \delta_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i}\right) = \dfrac{\mu+\delta_{i-1}}{s_{i-1}} \cdot \dfrac{\partial k_{Ei-1}^*}{\partial \delta_i}, \\
\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i}\right) = \dfrac{\mu+\delta_i}{s_i} \cdot \dfrac{\partial k_{Ei}^*}{\partial \delta_i} + \dfrac{k_{Ei}^*}{s_i}, \\
\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i}\right) = \dfrac{\mu+\delta_{i+1}}{s_{i+1}} \cdot \dfrac{\partial k_{Ei+1}^*}{\partial \delta_i}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i}\right) = \dfrac{\mu+\delta_N}{s_N} \cdot \dfrac{\partial k_{EN}^*}{\partial \delta_i}.
\end{array}\right\} \tag{29}$$

[11] Szczegółowe uzasadnienie tego, że im wyższą wartość przyjmuje k_{Ei}^*, tym wyżej położona jest ścieżka czasowa k_i^* w warunkach wzrostu równomiernego można znaleźć w punkcie 3.5 pracy Tokarskiego [2009].

Z układu równań (29) wynika, że dla $j \neq i$:

$$\frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i} = \frac{a_i \dfrac{\partial k_{Ei}^*}{\partial \delta_i} + \dfrac{k_{Ei}^*}{s_i}}{a_j}. \tag{30}$$

Wstawiając równanie (30) do i-tego równania układu (29) otrzymujemy

$$\frac{\partial k_{Ei}^*}{\partial \delta_i} = \frac{\dfrac{k_{Ei}^*}{s_i}\left(1 - \sum\limits_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} \dfrac{\bar{f}_j}{a_j}\right)}{a_i\left(\sum\limits_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} \dfrac{\bar{f}_j}{a_j} - 1\right) + \bar{f}_i} = \frac{k_{Ei}^*}{s_i a_i} \cdot \frac{1 - \sum\limits_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} \varepsilon_j^*}{\sum\limits_{j=1}^{N} \varepsilon_j^* - 1} < 0. \tag{31}$$

Wynika stąd, że wysokiej stopie deprecjacji i-tego (dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$) zasobu kapitału odpowiadają nisko położone długookresowe ścieżki wzrostu i-tego kapitału na pracującego.

Natomiast podstawiając do równania (30) równanie (31), uzyskujemy dla dowolnego $j \neq i$

$$\frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i} = \frac{k_{Ei}^*}{s_i a_j} \cdot \frac{\varepsilon_j^*}{\sum\limits_{j=1}^{N} \varepsilon_j^* - 1} < 0. \tag{32}$$

Płynie stąd wniosek, że wzrost stopy deprecjacji i-tego (dla $i = 1, 2, \ldots, N$) zasobu kapitału pociąga za sobą spadek j-tego ($j \neq i$) kapitału na pracującego na niżej położone długookresowe ścieżki wzrostu gospodarczego.

Różniczkując układ równań (20) względem n oraz dokonując elementarnych przekształceń mamy

$$\left.\begin{array}{l}
\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial n}\right) = \dfrac{k_{E1}^*}{s_1} + \dfrac{(\mu + \delta_1)\dfrac{\partial k_{E1}^*}{\partial n}}{s_1}, \\
\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial n}\right) = \dfrac{k_{E2}^*}{s_2} + \dfrac{(\mu + \delta_2)\dfrac{\partial k_{E2}^*}{\partial n}}{s_2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\bar{f}_j \dfrac{\partial k_{Ej}^*}{\partial n}\right) = \dfrac{k_{EN}^*}{s_N} + \dfrac{(\mu + \delta_2)\dfrac{\partial k_{EN}^*}{\partial n}}{s_N},
\end{array}\right\} \tag{33}$$

Stąd dla każdego $i = 1, 2, \ldots, N$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial k_{Ei}^*}{\partial n} = \frac{\sum_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} \varepsilon_j^* \cdot \frac{k_{Ej}^*}{s_j} + \frac{k_{Ei}^*}{s_i} \cdot \left(1 - \sum_{j=1 \wedge j \neq i}^{N} \varepsilon_j^*\right)}{a_i \left(\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j^* - 1\right)} < 0. \tag{34}$$

Wynika stąd, że wzrost stopy liczby pracujących n powoduje spadek i-tego (dla $i = 1, 2, \ldots, N$) zasobu kapitału na pracującego na niżej położone długookresowe ścieżki wzrostu gospodarczego.

W punkcie równowagi uogólnionego modelu Nonnemana-Vanhoudta funkcję produkcji w postaci intensywnej (17) można zapisać następująco:

$$y_E^* = f\left(k_{E1}^*, k_{E2}^*, \ldots, k_{EN}^*\right), \tag{35}$$

gdzie y_E^* oznacza produkt na jednostkę efektywnej pracy w warunkach owej równowagi. Różniczkując równanie (35) względem s_i (dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots, N$) otrzymujemy

$$\frac{\partial y_E^*}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} > 0. \tag{36}$$

Nierówność

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial s_i} > 0$$

w zależności (36) wynika z właściwości (v) funkcji (17), podstawienia $\overline{f}_j = \frac{\partial f}{\partial k_{Ej}}\left(k_E^*\right)$ oraz ze związków (27) i (28). Po zróżniczkowaniu równania (35) względem δ_i, uzyskujemy

$$\forall i = 1, 2, \ldots, N \qquad \frac{\partial y_E^*}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial \delta_i} < 0, \tag{37}$$

gdyż zachodzą związki (31) i (32). Stąd zaś, że

$$\frac{\partial y_E^*}{\partial n} = \sum_{j=1}^{N} \overline{f}_j \frac{\partial k_{Ej}^*}{\partial n}$$

oraz z nierówności (34) mamy

$$\frac{\partial y_E^*}{\partial n} < 0 \qquad (37).$$

Nierówności (36)–(38) interpretuje się ekonomicznie w ten sposób, że wysokim stopom inwestycji s_i (dla $i = 1, 2, \ldots, N$), niskim stopom deprecjacji δ_i (dla $i = 1, 2, \ldots, N$) i/lub niskiej stopie wzrostu liczby pracujących n towarzyszą wysokie wartości produktu y_E^* na jednostkę efektywnej pracy w długookresowej równowadze uogólnionego modelu Nonnemana-Vanhoudta i wysoko położona długookresowa ścieżka wzrostu wydajności pracy.

Podsumowanie

Z prowadzonych w pracy rozważań płyną następujące wnioski:

- Układ równań różniczkowych uogólnionego modelu wzrostu Nonnemana-Vanhoudta jest układem równań ze stabilnym punktem stacjonarnym, którego (uwikłane) rozwiązanie wyznacza długookresową równowagę analizowanej gospodarki.
- W długim okresie – podobnie jak w oryginalnym modelu Nonnemana-Vanhoudta – kolejne zasoby kapitału na pracującego oraz strumień wydajności pracy rosną według stopy wzrostu równej stopie postępu technicznego w sensie Harroda.
- W warunkach długookresowej równowagi uogólnionego modelu Nonnemana-Vanhoudta kolejne zasoby kapitału na jednostkę efektywnej pracy oraz strumień produktu na jednostkę efektywnej pracy są zależne od stóp inwestycji w kolejne zasoby kapitału, stóp ich deprecjacji oraz stopy wzrostu liczby pracujących.
- Wysokie wartości stóp inwestycji podnoszą wielkości kolejnych zasobów kapitału i strumienia produkcji na jednostkę efektywnej pracy, co wyprowadza badaną gospodarkę na wyżej położone długookresowe ścieżki wzrostu kolejnych zasobów kapitału na pracującego oraz wydajności pracy.
- Wysokie stopy deprecjacji kapitału i/lub wysoka stopa wzrostu liczby pracujących obniżają wielkości kolejnych zasobów kapitału i strumienia produkcji na jednostkę efektywnej pracy, co powoduje, że gospodarka typu Nonnemana-

-Vanhoudta – podobnie jak w oryginalnym modelu – schodzi na niżej położone ścieżki wzrostu podstawowych zmiennych makroekonomicznych w długim okresie.

Bibliografia

Cobb, C.W., Douglas, Ph., 1928, *A theory of production*, American Economic Review, No. 18.

Dykas, P., Sulima, A., Tokarski, T., 2008, *Złote reguły akumulacji kapitału w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, Gospodarka Narodowa nr 11–12.

Mankiw, N.G., Romer, D., Weil, D.N., 1992, *A contribution to the empirics of economic growth*, Quarterly Journal of Economics, May.

Nonneman, W., Vanhoudt, P., 1996, *A further augmentation of the Solow Model and the empirics of economic growth for the OECD countries*, Quarterly Journal of Economics, August.

Solow, R.M., 1956, *A contribution to the theory of economic growth*, Quarterly Journal of Economics, February.

Sulima, A., 2010, *Równowaga Nonnemana-Vanhoudta z N-kapitałową funkcją produkcji CES* (referat na IV Otwarte Seminarium WIGE UE Poznań).

Tokarski, T., 2007, *Optymalne stopy inwestycji w N-kapitałowym modelu wzrostu gospodarczego*, Gospodarka Narodowa nr 9.

Tokarski, T., 2008, *Matematyczne modele przedsiębiorstwa*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

Tokarski, T., 2009, *Matematyczne modele wzrostu gospodarczego* (*ujęcie neoklasyczne*), Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.

GENERALIZATION OF THE NONNEMAN-VANHOUDT GROWTH MODEL

Summary: This paper presents generalization of the Nonneman-Vanhoudt (1996) growth model. The Cobb-Douglas production function was replaced by the generalized neo-classical production function. Moreover, it was proved that in the growth model defined in this way, the stationary point exists and such a point is a long-run stable point (a long–run equilibrium exists). The economic characteristics of such a point were analyzed too.