Roman Kiedrowski
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

STABILNOŚĆ ZBIORU STANÓW RÓWNOWAGI KLASYCZNEJ W WIELOSEKTOROWYM MODELU WZROSTU Z HETEROGENICZNYMI WŁAŚCICIELAMI KAPITAŁU

Streszczenie: Autor nawiązuje do swojej książki poświęconej matematycznej analizie procesu wyrównywania się stóp zysku w rosnącej gospodarce złożonej z *n* sektorów (przedsiębiorstw), będących własnością *m* kapitalistów, którzy lokują swoje kapitały w sektorach na podstawie różnic w stopach zysku.

Z matematycznego punktu widzenia zagadnienie to jest równoważne analizie stabilności stanów dynamicznej równowagi klasycznej z identycznymi stopami zysku w sektorach, tworzących zbiór mocy continuum. Prezentowany w cytowanej książce dowód odpowiedniego twierdzenia o stabilności jest długi i skomplikowany.

Celem artykułu jest krótkie i przejrzyste zaprezentowanie kluczowych idei tego dowodu, przy upraszczającym założeniu, że wszyscy właściciele kapitału mają taką samą skłonność do konsumpcji.

Słowa kluczowe: równowaga klasyczna, alokacja kapitału, stopa zysku z kapitału, wyrównywanie się stóp zysku, zbiór stanów równowagi, stabilność, wzrost równomierny, wzrost gospodarczy, gospodarka wielosektorowa

Wprowadzenie

Prezentowany artykuł jest swoistym suplementem do książki autora [Kiedrowski 2007] i jest poświęcony analizowanemu w rozdziałach trzecim i czwartym, wielosektorowemu modelowi wzrostu, w którym centralne miejsce zajmuje opis klasycznego procesu alokacji kapitału w przedsiębiorstwach (sektorach) przez heterogenicznych właścicieli kapitału[1]. Właściciele kapitału, zwani krótko kapitalistami, lokują swoje kapitały w różnych sektorach (przedsiębiorstwach), kierując się charakteryzującymi je stopami zysku. Im wyższą stopą zysku cechuje się określone przedsiębiorstwo, tym relatywnie więcej trafia do niego nowego kapitału, co odpowiednio zwiększa zasób jego majątku trwałego i zdolności wytwórcze. Rentowność kapitału w poszczególnych przedsiębiorstwach zależy od cen wytwarzanych przez nie towarów oraz od cen innych towarów (w tym pracy), służących im jako nakłady produkcyjne. Ceny zaś zmieniają się w zależności od relacji między popytem i podażą, odzwierciedlonych poziomem wskaźnika zapasów[2].

Centralnym zagadnieniem w cytowanych pracach jest analiza własności długookresowej równowagi klasycznej, zdefiniowanej jako stan modelowanej gospodarki, utrzymujący się w kolejnych okresach horyzontu czasowego, w którym:
– ceny wszystkich produktów są dodatnie i stałe,
– stopy zysku wszystkich przedsiębiorstw są jednakowe, dodatnie i stałe,
– majątek trwały wszystkich przedsiębiorstw jest wykorzystany w stopniu normatywnym, a jego zasoby we wszystkich przedsiębiorstwach rosną z jednakową stopą wzrostu,
– udziały własnościowe poszczególnych kapitalistów w kapitałach przedsiębiorstw są stałe.

Przeprowadzone analizy ujawniły następujące własności równowagi klasycznej.
• W rozpatrywanym modelu istnieje nieskończenie wiele różnych stanów równowagi, tworzących zbiór mocy continuum.
• Koniecznym warunkiem na to, aby gospodarka znalazła się w stanie równowagi klasycznej jest, aby jedynymi właścicielami (udziałowcami) wszystkich przedsiębiorstw zostali kapitaliści o jednakowej skłonności do konsumpcji.
• Poszczególne stany równowagi są generowane przez wektory η rozkładu własności przedsiębiorstw pomiędzy kapitalistów o takiej samej skłonności do konsumpcji α.
• Każdy stan równowagi jest określony z dokładnością do struktury i opisany przez: równomierną stopę zysku $\overline{r}$, unormowany wektor cen równowagi $\overline{x}$, unormowany wektor zasobów majątku trwałego przedsiębiorstw $\overline{k}$, wektor rozkładu własności η oraz (dane egzogenicznie) wektor normatywnych wskaźników wykorzystania majątku trwałego przedsiębiorstw $\overline{u}$ i wektor normatywnych wskaźników zapasów $\overline{s}$.

[1] W pracach [Kiedrowski 2006, 2007] model ten nazywany jest także ogólnym modelem konkurencji klasycznej lub modelem konkurencji klasycznej z wieloma właścicielami kapitału.

[2] Omawiany model jest rozwinięciem modeli autorów francuskich, G. Duménila i D. Lévy'ego, którzy analizowali podobny mechanizm funkcjonowania gospodarki z wieloma heterogenicznymi właścicielami kapitału [Duménil i Lévy 1987a] lub z jednym, reprezentatywnym właścicielem kapitału [Duménil i Lévy 1987b, 1989, 1991 i 1993].

- W każdym ze stanów równowagi (dla danych wektorów $\overline{u}$ i $\overline{s}$) równomierna stopa zysku $\overline{r}$ i wektor cen równowagi $\overline{x}$ są identyczne.
- Każdemu rozkładowi własności η odpowiada właściwy mu wektor $\overline{k} = \overline{k}(\eta)$ struktury majątku trwałego, odtwarzanej z okresu na okres w procesie równomiernego wzrostu.
- W każdym stanie równowagi, niezależnie od rozkładu własności η, wszystkie zmienne ilościowe modelu, jak zasoby majątku trwałego przedsiębiorstw, produkcja poszczególnych produktów oraz popyt zaopatrzeniowy, inwestycyjny i konsumpcyjny rosną z taką samą równomierną stopą wzrostu $\overline{\rho} = (1-\alpha)\overline{r}$.
- Równomierna stopa wzrostu $\overline{\rho}$ nie zależy ani od struktury majątku trwałego w równowadze (opisanej wektorem $\overline{k} = \overline{k}(\eta)$), ani od analitycznej postaci funkcji popytu konsumpcyjnego pracowników najemnych i poszczególnych kapitalistów.

Równowaga, w której stopy zysku z kapitału ulokowanego w różnych obszarach gospodarki są identyczne, była już wskazywana w pracach Smitha, Ricardo i Marksa jako stan, ku któremu w długim horyzoncie czasowym zmierza gospodarka w wyniku niezakłóconego mechanizmu alokacji kapitału opartego na różnicach w stopach zysku i niwelującego te różnice.

W cytowanej pracy autora [Kiedrowski 2007] zostało udowodnione twierdzenie, głoszące, że jeżeli odległość stanu początkowego gospodarki od zbioru stanów równowagi jest mała, a reakcje podmiotów na różne przejawy nierównowagi nie są zbyt gwałtowne, to z upływem czasu gospodarka dąży do jednego z wyżej opisanych stanów równowagi. Twierdzenie to jest formalnym potwierdzeniem klasycznej tezy o wyrównywaniu się stóp zysku z kapitału, czemu towarzyszy formowanie się takich proporcji między zasobami majątku trwałego poszczególnych przedsiębiorstw, które umożliwiają równomierny wzrost gospodarki. Poza tym klasycznym rezultatem w omawianym twierdzeniu wskazuje się dodatkowo na dwie istotne cechy procesu zbieżności do równowagi, jakie wynikają z rozpatrywania w modelu wielu właścicieli kapitału. Po pierwsze, stan równowagi, ku któremu zmierza gospodarka, zależy od jej stanu początkowego i jest jednym z nieskończenie wielu możliwych stanów równowagi. Po drugie, w procesie dochodzenia gospodarki do równowagi maleją do zera udziały własnościowe wszystkich kapitalistów w kapitałach przedsiębiorstw, których skłonność do konsumpcji jest wyższa od minimalnej. (W granicy jedynymi właścicielami wszystkich przedsiębiorstw stają się kapitaliści o najniższej skłonności do konsumpcji, a najwyższej do akumulacji kapitału).

Ze względu na mnogość stanów równowagi, do których potencjalnie może dążyć gospodarka, omawiane twierdzenie zostało nazwane przez autora twierdzeniem o stabilności zbioru stanów równowagi klasycznej. Dowód tego twierdzenia jest długi i skomplikowany. Składa się na niego seria lematów dowodzonych w rozdziałach drugim i czwartym oraz w aneksie cytowanej książki, co łącznie zajmuje około 70 stron tekstu [Kiedrowski 2007]. Kolejnych kilkanaście stron zajmują ponadto rozważania prowadzące do sformułowania samych założeń twierdzenia.

Celem artykułu jest prezentacja omawianego twierdzenia o stabilności zbioru stanów równowagi, jego istoty i założeń, jak również idei dowodu w sposób, który pozwoliłby Czytelnikowi na szybkie zapoznanie się z kluczowymi zagadnieniami bez zagłębiania się w nużące szczegóły. Z tego względu, w stosunku do oryginalnego twierdzenia prezentowanego w cytowanej książce, w artykule prezentowana jest jego wersja uproszczona, otrzymana przy założeniu, że wszyscy rozpatrywani właściciele kapitału mają taką samą skłonność do konsumpcji. Założenie to istotnie upraszcza dowód twierdzenia o stabilności zbioru stanów równowagi klasycznej, co umożliwia przejrzyste zaprezentowanie jego idei. Konsekwencją przyjętego uproszczenia jest jednak pominięcie analiz prowadzących do wniosku, że rozpatrywany mechanizm alokacji kapitału skutkuje z upływem czasu całkowitą marginalizacją udziałów kapitalistów o skłonności do konsumpcji wyższej niż minimalna w kapitałach przedsiębiorstw (w granicy ich udziały własnościowe maleją do zera).

W artykule posługujemy się oznaczeniami przyjętymi we wcześniejszych pracach autora [Kiedrowski 2006 i 2007]. Należy jednak podkreślić założenie, że wszyscy kapitaliści mają taką samą skłonność do konsumpcji ($\alpha^k = \alpha$, $k = 1, \ldots, m$), co sprawia, że wektor udziałów własnościowych wszystkich kapitalistów w kapitałach przedsiębiorstw

$$\eta = (\eta^{11}, \ldots, \eta^{1n}, \eta^{21}, \ldots, \eta^{2n}, \ldots, \eta^{m1}, \ldots, \eta^{mn}) > 0,$$

spełniający warunki

$$0 \le \eta^{ki} \le 1, \quad \sum_{k=1}^{m} \eta^{ki} = 1 \quad (k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n),$$

jest obecnie tożsamy ze zdefiniowanym w: [Kiedrowski 2007, s. 114] wektorem udziałów własnościowych kapitalistów o minimalnej skłonności do konsumpcji, postaci

$$Y = (\eta^{m-\bar{m}+1\,1}, \ldots, \eta^{m-\bar{m}+1\,n}, \eta^{m-\bar{m}+2\,1}, \ldots, \eta^{m\,1}, \ldots, \eta^{m\,n}) > 0.$$

1. Model w postaci zredukowanej

Wyjściowa postać modelu, której dotyczy twierdzenie o stabilności zbioru stanów równowagi klasycznej została szczegółowo przedstawiona w: [Kiedrowski 2006 i 2007, rozdz. 3]. Składają się na nią równania opisujące dynamikę cen i zasobów majątku trwałego przedsiębiorstw, dynamikę wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych oraz dynamikę zapasów (dynamiczny bilans produkcji). W cytowanych pracach zdefiniowano stany równowagi klasycznej, odpowiadające poszczególnym rozkładom własności η, oraz wykazano ich istnienie. Pokazano też, że każdy stan równowagi jest określony z dokładnością do struktury (proporcji pomiędzy odpowiednimi zmiennymi modelu, przy dowolnych wartościach samych zmiennych).

Fakt, że stany równowagi są określone z dokładnością do struktury, sprawia, że także zbieżność gospodarki do równowagi ma charakter strukturalny. Z tego względu analiza zbieżności gospodarki do równowagi klasycznej jest prowadzona na podstawie postaci zredukowanej modelu, w której wektory cen p_t, majątku trwałego przedsiębiorstw K_t i zapasów S_t zostały zastąpione ich względnymi odpowiednikami x_t, k_t i s_t o składowych:

$$x_t^i = \frac{p_t^i}{p_t^n}, \quad k_t^i = \frac{K_t^i}{K_t^n} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad s_t^i = \frac{S_t^i}{K_t^i} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Poniżej prezentujemy bloki równań modelu zredukowanego, zmienne pomocnicze i parametry. Nie pokazujemy ani w jaki sposób poszczególne równania wynikają z pierwotnych założeń modelu, ani jaka jest ich szczegółowa interpretacja ekonomiczna (zajęłoby to bowiem dodatkowych kilkanaście stron tekstu). Czytelnika zainteresowanego ekonomiczną treścią modelu prosimy o sięgnięcie do książki: [Kiedrowski 2007, rozdz. 3].

Równania dynamiki modelu zredukowanego

Dynamika cen

$$x_{t+1}^i = x_t^i \frac{1 - \beta^i (s_{t+1}^i - \overline{s}^i)}{1 - \beta^n (s_{t+1}^n - \overline{s}^n)} \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{1}$$

Dynamika majątku trwałego

$$k_{t+1}^i = k_t^i \frac{1 + \sum_{k=1}^{m} \eta_t^{ki} \left(\varphi_t^k + \gamma^k (r_t^i - r_t) \right)}{1 + \sum_{k=1}^{m} \eta_t^{kn} \left(\varphi_t^k + \gamma^k (r_t^n - r_t) \right)} \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Dynamika produkcji (wskaźnika wykorzystania majątku trwałego)

$$u_{t+1}^i = \overline{u}^i + \sigma^i (u_t^i - \overline{u}^i) - \varepsilon^i (s_t^i - \overline{s}^i) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Dynamika wskaźnika zapasów

$$s_{t+1}^{i} = \frac{s_t^i}{1+\sum_{k=1}^{m}\eta_t^{ki}\left(\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^i-r_t)\right)}+$$
$$+\frac{\left(I-A-\delta B-D(x_t,\eta_t)\right)_i\hat{U}_t k_t+B_i k_t}{\left(1+\sum_{k=1}^{m}\eta_t^{ki}\left(1+\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^i-r_t)\right)\right)k_t^i}-\frac{B_i k_{t+1}}{k_{t+1}^i} \quad (i=1,\ldots,n). \tag{4}$$

Dynamika udziałów własnościowych

$$\eta_{t+1}^{ki}=\eta_t^{ki}\frac{1+\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^i-r_t)}{\sum_{k=1}^{m}\eta_t^{ki}\left(1+\varphi_t^k+\gamma^k(r_t^i-r_t)\right)} \quad (k=1,\ldots,m;\, i=1,\ldots,n). \tag{5}$$

Zmienne pomocnicze

Macierz transformacji wektora produkcji w wektor globalnego popytu konsumpcyjnego

$$D(x_t,\eta_t)=d^w(x_t)x_t G\hat{L}+\alpha\sum_{k=1}^{m}d^k(x_t)x_t(I-A-\delta B-G\hat{L})\hat{\eta}_t^k. \tag{6}$$

Zmienna bilansująca fundusz akumulacji kapitału k-tego kapitalisty z przyrostami jego udziałów w kapitałach przedsiębiorstw

$$\varphi_t^k=\rho_t^k-\gamma^k(r_t^k-r_t) \quad (k=1,\ldots,m). \tag{7}$$

Stopa wzrostu kapitału k-tego kapitalisty

$$\rho_t^k=(1-\alpha)r_t^k+\beta_0^k v_t-\beta_1^k j_t \quad (k=1,\ldots,m). \tag{8}$$

Stopa zysku k-tego kapitalisty

$$r_t^k=\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_t^{ki}r_t^i x_t(B+\hat{s})^i k_t^i}{\sum_{i=1}^{n}\eta_t^{ki}x_t(B+\hat{s})^i k_t^i} \quad (k=1,\ldots,m). \tag{9}$$

Stopa zysku *i*-tego przedsiębiorstwa

$$r_t^i = \frac{x_t(I - A - \delta B - G\hat{L})^i u_t^i}{x_t(B + \hat{\bar{s}})^i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Średnia stopa zysku w całej gospodarce

$$r_t = \frac{x_t(I - A - \delta B - G\hat{L})\,\hat{U}_t k_t}{x_t(B + \hat{\bar{s}})K_t}. \tag{11}$$

Wskaźnik koniunktury

$$v_t = \frac{x_t(\hat{U}_t - \hat{\bar{U}})k_t}{x_t\hat{\bar{U}}k_t}. \tag{12}$$

Wskaźnik inflacji

$$j_t = \frac{x_t\hat{U}_t k_t}{x_t\left(I - \hat{\beta}(\hat{s}_t - \hat{\bar{s}})\right)^{-1}\hat{U}_t k_t} - 1. \tag{13}$$

Parametry

α – skłonność do konsumpcji (jednakowa dla wszystkich kapitalistów),
$\bar{s}_t^i$ – normatywny wskaźnik zapasów,
$\bar{u}^i$ – normatywny wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnych (majątku trwałego),
$\beta^i, \sigma^i, \varepsilon^i, \gamma^k, \beta_0^k, \beta_1^k$ – parametry reakcji,
A – macierz współczynników materiałochłonności,
B – macierz współczynników kapitałochłonności produkcji,
δ – współczynnik deprecjacji kapitału (majątku trwałego),
$\hat{L}$ – diagonalna macierz współczynników pracochłonności,
G – macierz indeksacji wynagrodzeń,
$d^w(w)$ – funkcja popytu konsumpcyjnego pracowników najemnych przy jednostkowym poziomie dochodu,
$d^k(x)$ – funkcja popytu konsumpcyjnego *k*-tego kapitalisty przy jednostkowym poziomie dochodu (zysku) przeznaczonego na konsumpcję.

Inne oznaczenia

$$x_t = (x_t^1, \ldots, x_t^{n-1}, 1), \qquad k_t = (k_t^1, \ldots, k_t^{n-1}, 1),$$

$$\eta_t = (\eta_t^{11}, \ldots, \eta_t^{1n}, \eta_t^{21}, \ldots, \eta_t^{2n}, \ldots, \eta_t^{m\,1}, \ldots, \eta_t^{m\,n}),$$

$$\hat{\eta}_t^k = \mathrm{diag}\,(\eta_t^{k1}, \ldots, \eta_t^{k\,n}), \qquad \hat{U}_t = \mathrm{diag}\,(u_t^1, \ldots, u_t^n), \qquad \hat{s}_t = \mathrm{diag}\,(s_t^1, \ldots, s_t^n).$$

Zakładamy, że wektor początkowych wartości wszystkich podstawowych zmiennych modelu (1)–(13) jest dodatni

$$(x_0, k_0, u_0, s_0, \eta_0) > 0. \tag{14}$$

Definicja 1. Dopuszczalną trajektorią modelu (1)–(13), wychodzącą z danego stanu początkowego $(x_0, k_0, u_0, s_0, \eta_0) > 0$, nazywamy ciąg $\{x_t, k_t, u_t, s_t, \eta_t\}_{t=0}^{\infty}$, spełniający w kolejnych okresach $t = 0, 1, 2, \ldots$ równania tego modelu oraz nierówności $(x_t, k_t, u_t, s_t, \eta_t) > 0$[3].

Eliminując w wyniku kolejnych podstawień wszystkie zmienne pomocnicze, model (1)–(13) można sprowadzić do następującego układu nieliniowych równań różnicowych pierwszego rzędu o następującej, ogólnej postaci:

$$x_{t+1}^i = f_i^1(x_t, s_{t+1}) \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{15}$$

$$k_{t+1}^i = f_i^2(x_t, k_t, u_t, s_t, \eta_t) \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{16}$$

$$u_{t+1}^i = f_i^3(u_t, s_t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{17}$$

$$s_{t+1}^i = f_i^4(x_t, k_t, k_{t+1}, u_t, s_t, \eta_t) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

$$\eta_{t+1}^{ki} = G_{ki}(x_t, k_t, u_t, s_t, \eta_t) \qquad (k = 1, \ldots, m; i = 1, \ldots, n). \tag{19}$$

[3] Z twierdzenia o stabilności zbioru stanów równowagi przedstawionego w punkcie 2 artykułu (twierdzenia 1) wynika, że istnieją takie dodatnie stany początkowe zmiennych modelu oraz takie wartości parametrów reakcji β^i, ε^i, σ^i, γ^k, β_0^k, β_1^k że równania modelu generują trajektorie dodatnie w nieskończonym horyzoncie czasowym.

Niech

$$X_t = (x_t^1,\ \dots,\ x_t^{n-1},\ k_t^1,\ \dots,\ k_t^{n-1},\ u_t^1,\ \dots,\ u_t^n,\ s_t^1,\ \dots,\ s_t^n)^{\mathrm{T}}. \tag{20}$$

Definiując funkcje wektorowe *f* i *G*, których składowymi są funkcje występujące z prawej strony, odpowiednio, równań (15)–(18) i (19), cały model (1)–(13) możemy rozpatrywać jako następujący układ równań różnicowych:

$$X_{t+1} = f(X_t, X_{t+1}, \eta_t), \tag{21}$$

$$\eta_{t+1} = G(X_t, \eta_t), \tag{22}$$

gdzie $X_t \in R_+^{4n-2}, \eta_t \in R_+^{nm}$.

Po podstawieniu (16) do (18), a następnie (18) do (15), układ (21)–(22) przyjmuje postać rozwikłaną

$$X_{t+1} = F(X_t, \eta_t), \tag{23}$$

$$\eta_{t+1} = G(X_t, \eta_t). \tag{24}$$

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń, każdą dopuszczalną trajektorię $\{x_t, k_t,\ u_t, s_t, \eta_t\}_{t=0}^{\infty}$ modelu (1)–(13) możemy rozpatrywać w postaci $\{X_t, \eta_t\}_{t=0}^{\infty}$. Analogicznie możemy też przedstawić każdy stan równowagi klasycznej:

$$\big(X(\eta), \eta\big) = \big(\bar{x}, \bar{k}(\eta), \bar{u}, \bar{s}, \eta\big). \tag{25}$$

Wprowadźmy założenia.

Założenie 1. *Macierz* $(A + \delta B)$ *jest nierozkładalna, tzn. nie istnieje taki podzbiór właściwy* $J \neq \emptyset$ *zbioru* $\{1, 2, \dots, n\}$, *że* $\forall i \notin J,\ \forall j \in J \quad a_{ij} + \delta b_{ij} = 0$.

Założenie nierozkładalności oznacza, że nie istnieje żadna podgrupa produktów, do wytworzenia których są potrzebne, jako nakłady bieżące lub majątkowe, wyłącznie produkty należące do tej podgrupy. Ponieważ w rozpatrywanej gospodarce każde przedsiębiorstwo wytwarza tylko jeden produkt, jest to równoznaczne z tym, że żaden właściwy podzbiór przedsiębiorstw nie jest samowystarczalny.

Założenie 2. *Istnieje taki wektor cen* $p > 0$, *że* $p > p(A + \delta B + G\hat{L})$.

Nierówność powyższa jest wariantem tzw. założenia o produktywności gospodarki (macierzy). Oznacza ona, że możliwy jest taki układ cen $p = (p^1, \ldots, p^n) > 0$, że cena każdego produktu p^j jest większa od jednostkowych kosztów jego wytworzenia, obejmujących koszty nakładów bezpośrednich pA^j, koszty amortyzacji majątku trwałego δpB^j oraz koszty pracy $p(G\hat{L})^j$. Innymi słowy, zakładamy, że istnieją ceny, które wszystkim przedsiębiorstwom jednocześnie zapewniają dodatnie zyski kalkulacyjne.

Założenie 3. *Funkcje popytu konsumpcyjnego* $d^w(x_t)$ *i* $d^k(x_t)$ $(k = 1, \ldots, m)$ *mają ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu oraz są dodatnio jednorodne stopnia minus jeden względem cen, tzn.*:

$$\forall \lambda > 0 \quad d^w(\lambda x_t) = \lambda^{-1} d^w(x_t) \quad oraz \quad d^k(\lambda x_t) = \lambda^{-1} d^k(x_t).$$

Zgodnie z założeniem 3, przyjmujemy zatem, że λ-krotny wzrost wszystkich cen powoduje λ-krotny spadek popytu na wszystkie towary[4].

Jak pokazano w pracach autora [Kiedrowski 2006 i 2007, punkty 3.8 i 3.9], jeżeli spełnione są założenia 1–3, to dla każdego rozkładu własności η oraz dla danych egzogenicznie wektorów $\overline{u}$ i $\overline{s}$, wektor cen równowagi $\overline{x} > 0$ oraz wektor struktury majątku trwałego w równowadze $\overline{k}(\eta) > 0$ są, wraz z równomierną stopą zysku $\overline{r} > 0$, rozwiązaniem następującego układu równań macierzowych:

$$\overline{r}\,\overline{x}(B + \hat{\overline{s}}) = \overline{x}(I - A - \delta B - G\hat{L})\hat{\overline{U}}, \tag{26}$$

$$\hat{\overline{U}}\overline{k} = (1-\alpha)\overline{r}(B + \hat{\overline{s}})\overline{k} + \left(A + \delta B + d^w(\overline{x})\overline{x}G\hat{L}\right)\hat{\overline{U}}\overline{k} + \\ + \alpha \sum_{k=1}^{m} d^k(\overline{x})\overline{x}(I - A - \delta B - G\hat{L})\,\hat{\overline{\eta}}^k \hat{\overline{U}}\overline{k}. \tag{27}$$

Korzystając z (1)–(13) i (26)–(27), łatwo można sprawdzić, że dla każdego rozkładu własności $\eta > 0$ stan równowagi klasycznej $\left(X(\eta), \eta\right) = \left(\overline{x}, \overline{k}(\eta), \overline{u}, \overline{s}, \eta\right) > 0$ jest punktem stałym układu (23)–(24), czyli

$$F\left(X(\eta), \eta\right) = X(\eta), \tag{28}$$

$$G\left(X(\eta), \eta\right) = \eta. \tag{29}$$

[4] Generalnie, zgodnie z wyjściową postacią modelu przy danych cenach popyt konsumpcyjny pracowników najemnych jest wprost proporcjonalny do ich wynagrodzeń, a popyt konsumpcyjny właścicieli kapitału jest wprost proporcjonalny do pewnej stałej części $0 < \alpha < 1$ ich zysków kalkulacyjnych.

2. Twierdzenie o stabilności zbioru stanów równowagi klasycznej

Weźmy dowolny rozkład własności $\eta > 0$ i zdefiniujmy macierz pochodnych cząstkowych funkcji (23), względem składowych wektora X, w stanie równowagi $\left(X(\eta),\eta\right)$:

$$A(\eta) = \left.\frac{\partial F(X,\eta)}{\partial X}\right|_{X=X(\eta)}. \tag{30}$$

Założenie 4. *Wśród pierwiastków charakterystycznych λ_i (rzeczywistych lub zespolonych) macierzy $A(\eta)$ nie ma pierwiastków zerowych ani wielokrotnych*[5].

Z założenia 4 wynika, że wektory własne V_i $(i = 1, \ldots, 4n-2)$ macierzy $A(\eta)$ są liniowo niezależne. W konsekwencji, każdy wektor $X \in R^{4n-2}$ jest pewną kombinacją liniową wektorów V_i postaci

$$X = \sum_{i=1}^{4n-2} \alpha_i V_i. \tag{31}$$

Zdefiniujmy normę wektora X jako sumę modułów współczynników α_i

$$\|X\| = \sum_{i=1}^{4n-2} |\alpha_i|. \tag{32}$$

Posługując się normą (32), twierdzenie o stabilności zbioru stanów równowagi w modelu (1)–(13) możemy sformułować następująco.

Twierdzenie 1. *Przy założeniach* 1–4, *dla każdego stanu równowagi* $\left(X(\eta),\eta\right) > 0$ *istnieją takie liczby* $\varepsilon > 0$, $\xi > 0$, $\phi > 0$, *oraz* $\overline{\gamma} > 0$, $\overline{\beta}^i > 0$, $\overline{\varepsilon}^i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, *że jeżeli*:

(i) $\|\eta_0 - \eta\| \le \varepsilon$, $\|X_0 - X(\eta)\| \le \xi$,

(ii) $\forall\, \eta^1, \eta^2$ $\|X(\eta^1) - X(\eta^2)\| \le \varphi \|\eta^1 - \eta^2\|$,

(iii) $0 < \gamma^k \le \overline{\gamma}$ $(k = 1, \ldots, m)$,

(iv) $0 < \beta^i \le \overline{\beta}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$,

(v) $0 < \varepsilon^i \le \overline{\varepsilon}^i$ $(i = 1, \ldots, n)$,

(vi) *parametry reakcji* $\beta_0^k > 0$, $\beta_1^k > 0$, *znajdują się w odpowiednio małych otoczeniach dowolnych stałych* $\beta_0 > 0$ *i* $\beta_1 > 0$,

[5] Założenie 4 jest mało restrykcyjne, gdyż dowolnie mała zmiana elementów każdej macierzy o wielokrotnych pierwiastkach charakterystycznych daje macierz o pierwiastkach jednokrotnych [Sydsæter, Strøm i Berck 2000].

to dopuszczalna trajektoria $\{X_t, \eta_t\}_{t=0}^{\infty}$ *modelu* (1)–(13), *wychodząca ze stanu początkowego* (X_0, η_0), *jest zbieżna do pewnego stanu równowagi* $\left(X(\eta'), \eta'\right) > 0$, *gdzie*

$$\left\| \eta_0 - \eta' \right\| \leq 3\varepsilon, \quad \left\| X_0 - X(\eta') \right\| \leq 5\xi.$$

Z własności normy otrzymujemy ponadto bezpośrednio, że

$$\left\| \eta - \eta' \right\| \leq \left\| \eta_0 - \eta \right\| + \left\| \eta_0 - \eta' \right\| \leq 4\varepsilon, \tag{33}$$

$$\left\| X(\eta) - X(\eta') \right\| \leq \left\| X_0 - X(\eta) \right\| + \left\| X_0 - X(\eta') \right\| \leq 6\xi. \tag{34}$$

Jak wynika z twierdzenia 1, podstawowym warunkiem stabilności gospodarki z wieloma właścicielami kapitału jest to, aby w odpowiednio małym otoczeniu jej stanu początkowego (X_0, η_0) znajdował się pewien stan równowagi $\left(X(\eta), \eta\right)$. Gospodarka będzie wówczas zmierzać do jednego ze stanów równowagi klasycznej $\left(X(\eta'), \eta'\right)$ znajdującego się w pewnym otoczeniu zarówno stanu początkowego, jak też stanu $\left(X(\eta), \eta\right)$[6]. Ponieważ możliwych stanów równowagi jest nieskończenie wiele, możemy też powiedzieć, że podstawowym warunkiem stabilności gospodarki jest to, aby jej stan początkowy znajdował się dostatecznie blisko zbioru stanów równowagi[7].

Drugi warunek stabilności, przedstawiony w punkcie (ii) twierdzenia, jest postulatem ograniczonej wrażliwości stanów równowagi klasycznej na zmiany rozkładu własności, a ściślej, jak wynika z (25), ograniczonego wpływu tych zmian na strukturę majątku trwałego w równowadze, opisaną wektorem $\overline{k}(\eta)$. Wobec (27), warunek ten jest spełniony wówczas, gdy funkcje popytu konsumpcyjnego poszczególnych właścicieli kapitału $d^k(x)$ $(k = 1, \ldots, m)$ generują podobne wartości popytu przy cenach równowagi $\overline{x}$.

Warunki (iii)–(v) są postulatami „braku nerwowości". Gospodarka dąży do równowagi, gdy reakcje przedsiębiorstw na odchylenia zapasów od poziomu normatywnego nie prowadzą do gwałtownych zmian cen czy też do gwałtownych zmian stopnia wykorzystania mocy produkcyjnych (małe parametry β^i oraz ε^i). Podobnie osiąganiu równowagi przez gospodarkę sprzyjają spokojne reakcje

[6] Nasuwa się następująca analogia z zakresu astronautyki. Przyrównując zbiór stanów równowagi do zbioru punktów na powierzchni pewnego ciała niebieskiego, a trajektorię, po której rozwija się gospodarka, do trajektorii lotu statku kosmicznego, to, zgodnie z twierdzeniem 1, jeżeli statek kosmiczny zbliży się na dostatecznie małą odległość do dowolnego punktu ciała niebieskiego, to wyląduje w pobliżu tego punktu.

[7] Rozpatrywana stabilność ma tym samym charakter lokalny.

właścicieli kapitału na różnice w stopach zysku (małe parametry γ^k), które nie powodują gwałtownych zmian w dopływie kapitału do przedsiębiorstw.

Warte odnotowania jest także to, że zgodnie z warunkiem (iv), inaczej niż w przypadku pozostałych parametrów reakcji, na zdolność gospodarki do osiągania równowagi nie ma wpływu wysokość parametrów β_0^k i β_1^k opisujących reakcje właścicieli kapitału odpowiednio na wskaźnik koniunktury i wskaźnik inflacji. Istotne jest tylko to, aby różnice między różnymi parametrami β_0^k oraz między różnymi parametrami β_1^k ($k = 1, \ldots, m$) nie były zbyt duże.

3. Uwagi na temat dowodu stabilności zbioru stanów równowagi klasycznej

Standardową metodą badania lokalnej, asymptotycznej stabilności pojedynczego, izolowanego stanu równowagi $\bar{X} \in R_+^n$ nieliniowego układu równań różnicowych

$$X_{t+1} = F(X_t) \tag{35}$$

jest jego linearyzacja, polegająca na rozwinięciu w szereg Taylora funkcji $F(X)$ w otoczeniu stanu równowagi $\bar{X}$ i pominięciu pochodnych wyższych rzędów. W wyniku tego zabiegu otrzymujemy przybliżone równanie

$$F(X_t) \approx F(\bar{X}) + \left.\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right|_{X=\bar{X}} (X_t - \bar{X}),$$

w którym $F(\bar{X}) = \bar{X}$, zgodnie z definicją stanu równowagi, a $\left.\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right|_{X=\bar{X}}$ jest macierzą Jacobiego funkcji $F(X)$ w stanie równowagi.

Liniową aproksymacją układu (35) nazywamy układ równań różnicowych liniowych postaci:

$$X_{t+1} - \bar{X} = \left.\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right|_{X=\bar{X}} (X_t - \bar{X}). \tag{36}$$

Zgodnie ze znanym twierdzeniem o stabilności dyskretnych systemów dynamicznych, wystarczającym warunkiem lokalnej, asymptotycznej stabilności stanu równowagi układu nieliniowego (35) jest globalna asymptotyczna stabilność układu liniowego (36). To z kolei jest równoważne temu, że moduły wszystkich pierwiastków charakterystycznych macierzy $\left.\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right|_{X=\bar{X}}$ są mniejsze od jeden [Stockey i Lucas 1989, s. 147]. W konsekwencji, jeżeli znamy analityczną postać równań tworzących układ (35), to aby stwierdzić, czy dany stan równowagi tego układu jest lokalnie asymptotycznie stabilny, wystarczy pokazać, że wszystkie pierwiastki charakterystyczne macierzy $\left.\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right|_{X=\bar{X}}$ mają moduły mniejsze od jeden[8].

Jak stwierdziliśmy w punkcie 1, model (1)–(13) ma nieskończenie wiele stanów równowagi klasycznej postaci $\left(X(\eta),\eta\right)$, z których każdy odpowiada innemu rozkładowi własności przedsiębiorstw wśród kapitalistów η. Chociaż model ten można sprowadzić do układu równań różnicowych pierwszego rzędu, to ze względu na mnogość jego stanów równowagi, dowód twierdzenia 1 (czyli analiza stabilności) wykracza poza tradycyjny schemat.

Dowód ten składa się z dwóch części. Pierwszą część stanowi przedstawiony w pracy autora [Kiedrowski 2007, s. 147–159] dowód innego twierdzenia, nazwanego twierdzeniem o stabilności zbioru punktów stałych nieliniowego układu równań różnicowych postaci (23)–(24). W twierdzeniu tym bez przesądzania o analitycznej postaci funkcji $F(X, \eta)$ i $G(X, \eta)$ podaje się dostateczne warunki zbieżności trajektorii układu (23)–(24) do jednego z punktów stałych $\left(X(\eta),\eta\right)$ tego układu, zależnego od stanu początkowego[9]. Głosi ono, że o ile funkcje F i G spełniają odpowiednie, ogólne założenia, to wystarczającym warunkiem zbieżności trajektorii układu (23)–(24) do pewnego punktu stałego jest to, aby w dostatecznie małym otoczeniu stanu początkowego znajdował się pewien punkt stały $\left(X(\eta),\eta\right)$ (niekoniecznie tożsamy z docelowym punktem stałym), dla którego moduły wszystkich pierwiastków charakterystycznych macierzy $A(\eta)=\left.\frac{\partial F(X,\eta)}{\partial X}\right|_{X=X(\eta)}$ są mniejsze od jeden[10].

W dowodzie twierdzenia o stabilności zbioru punktów stałych nieliniowego układu równań różnicowych postaci (23)–(24) kluczową rolę odgrywa analiza rozwinięć funkcji $F(X_t, \eta_t)$ i $G(X_t, \eta_t)$ w szereg Taylora. Istotne jest przy tym, że:

– rozpatruje się rozwinięcia układu (23)–(24) w otoczeniach punktów stałych $\left(X(\eta_t),\, \eta_t\right)$, odpowiadających poszczególnym elementom (X_t, η_t) dopuszczalnych trajektorii tego układu,

[8] Zadanie to jest stosunkowo proste, gdy układ (35) składa się z dwóch lub trzech równań, co umożliwia wyznaczenie analitycznej postaci pierwiastków charakterystycznych. W ogólnym przypadku analiza stabilności układów nieliniowych postaci (35) jest jednak złożona.

[9] W przypadku omawianego twierdzenia wygodniej mówić o punktach stałych $\left(X(\eta),\eta\right)$ niż o stanach równowagi z powodu czysto matematycznego charakteru tego twierdzenia. Funkcje $F(X, \eta)$ i $G(X, \eta)$ nie mają w nim określonej postaci analitycznej i tym samym układ (23)–(24) nie ma interpretacji ekonomicznej – na tym etapie dowodu nie można więc mówić o stanach równowagi klasycznej.

[10] Twierdzenie, o którym mowa, jest uogólnieniem podobnego twierdzenia G. Duménila i D. Lévy'ego dla zbioru punktów stałych układu (23)–(24) postaci $(0, \eta)$, spełniających równania $F(0, \eta) = 0$ i $G(0, \eta) = \eta$ [Duménil i Lévy 1987a].

– rozwinięcia nie są dokonywane względem wszystkich argumentów funkcji F i G, lecz tylko względem wektorów X_t,
– w rozwinięciach są także uwzględniane pochodne cząstkowe drugiego rzędu; w konsekwencji rozwinięciami funkcji $F(X_t, \eta_t)$ i $G(X_t, \eta_t)$ są funkcje kwadratowe,
– dla wszystkich możliwych par (X_t, η_t) wartości dokonanych rozwinięć są równe wartościom rozwijanych funkcji $F(X_t, \eta_t)$ i $G(X_t, \eta_t)$.

Zapiszmy równania (23)–(24) w postaci skalarnej

$$X_{t+1}^{i} = F_i(X_t, \eta_t) \qquad (i = 1, \ldots, 4n-2), \tag{37}$$

$$\eta_{t+1}^{ki} = G_{ki}(X_t, \eta_t) \qquad (k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, 4n-2). \tag{38}$$

W punktach stałych $\big(X(\eta_t), \eta_t\big)$ dla kolejnych indeksów i są spełnione równania:

$$F_i\big(X(\eta_t), \eta_t\big) = X^i(\eta_t), \quad G_{ki}\big(X(\eta_t), \eta_t\big) = \eta_t^{ki}.$$

Stąd, wobec wzoru Taylora [Sydsæter, Strøm i Berck 2000, s. 45], rozwinięcia, o których mowa powyżej, przyjmują postać:

$$X_{t+1}^{i} = F_i(X_t, \eta_t) = X^i(\eta_t) + A_i(\eta_t)\big(X_t - X(\eta_t)\big) + \\ + \big(X_t - X(\eta_t)\big)^{\mathrm{T}} H_i^F(X_t, \eta_t)\big(X_t - X(\eta_t)\big), \tag{39}$$

$$\eta_{t+1}^{ki} = G_{ki}(X_t, \eta_t) = \eta_t^{ki} + B_{ki}(\eta_t)\big(X_t - X(\eta_t)\big) + \\ + \big(X_t - X(\eta_t)\big)^{\mathrm{T}} H_{ki}^G(X_t, \eta_t)\big(X_t - X(\eta_t)\big), \tag{40}$$

gdzie $A_i(\eta_t)$ i $B_{ki}(\eta_t)$ są $(4n-2)$-wymiarowymi wektorami wierszowymi postaci

$$A_i(\eta_t) = \left.\frac{\partial F_i(X, \eta_t)}{\partial X}\right|_{X = X(\eta_t)}, \quad B_{ki}(\eta_t) = \left.\frac{\partial G_{ki}(X, \eta_t)}{\partial X}\right|_{X = X(\eta_t)}, \tag{41}$$

a H_i^F i H_{ki}^G są macierzami kwadratowymi stopnia $4n-2$, postaci

$$H_i^F(X_t, \eta_t) = \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{\partial^2 F_i(X, \eta_t)}{\partial X^2}\right|_{X = \vartheta_t X_t + (1-\vartheta_t) X(\eta_t)}, \tag{42}$$

$$H_{ki}^{G}(X_t, \eta_t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 G_{ki}(X, \eta_t)}{\partial X^2} \bigg|_{X = \vartheta_t X_t + (1-\vartheta_t) X(\eta_t)}, \tag{43}$$

$$0 < \vartheta_t < 1. \tag{44}$$

Należy podkreślić, że rozwinięcia (39)–(40) i oparte na nich twierdzenie o stabilności zbioru punktów stałych nieliniowego układu równań różnicowych znajdują bezpośrednie zastosowanie w dowodzie twierdzenia 1 o stabilności zbioru stanów równowagi klasycznej jedynie przy upraszczającym założeniu, że wszyscy właściciele kapitału mają identyczną skłonność do konsumpcji, równą α. Wiąże się to z tym, że koniecznym warunkiem na to, aby gospodarka znajdowała się w stabilnym stanie równowagi klasycznej jest, aby jedynymi udziałowcami przedsiębiorstw byli kapitaliści o minimalnej skłonności do konsumpcji. W konsekwencji, jeżeli wektor $\eta_t > 0$ opisuje udziały własnościowe kapitalistów o różnej skłonności do konsumpcji, to para $\left(X(\eta_t), \eta_t\right)$ jest stanem nierównowagi, w którym $F_i\left(X(\eta_t), \eta_t\right) \neq X^i(\eta_t)$ i tym samym nie jest spełnione równanie (39), [Kiedrowski 2007, punkt 3.8]

Dodatkową komplikacją, pojawiającą się przy rozpatrywaniu właścicieli kapitału o różnych skłonnościach do konsumpcji jest również to, że w stanach równowagi udziały własnościowe η^{ki} pewnych kapitalistów są zawsze zerowe, co sprawia, że ich stopy zysku r^k, opisane równaniem (9), są w tych stanach nieokreślone[11].

Druga część dowodu twierdzenia 1 polega na wykazaniu, że równania modelu (1)–(13), wpisujące się w ogólny schemat (23)–(24), przy założeniach twierdzenia 1 spełniają wszystkie założenia twierdzenia o stabilności zbioru punktów stałych nieliniowego układu równań różnicowych. W szczególności dla dokończenia dowodu kluczowe jest wykazanie, że moduły wszystkich pierwiastków charakterystycznych dowolnej macierzy $A(\eta)$ są mniejsze od jeden. W tym celu wykorzystuje się twierdzenie Duménila i Lévy'ego o pierwiastkach charakterystycznych tzw. macierzy typu *H*, jak również twierdzenie autora o zbieżności pierwiastków wielomianu do pierwiastków wielomianu granicznego niższego stopnia. Szczegółowy sposób postępowania jest analogiczny do analizy pierwiastków charakterystycznych macierzy Jacobiego modelu konkurencji klasycznej z jednym, reprezentatywnym właścicielem kapitału [Kiedrowski 2007, s. 54–80, 127–135].

[11] Wspomniane trudności zostały przezwyciężone w pracy autora [Kiedrowski 2007], w której przedstawiono dowód twierdzenia o stabilności zbioru stanów równowagi klasycznej w ogólnym przypadku. Ceną było jednak znaczne zwiększenie złożoności wywodów.

Bibliografia

Duménil, G., Lévy, D., 1987a, *The Stability of Long-Term Equilibrium in a General Disequilibrium Model*, CEPREMAP Working Paper 8717, Paryż.

Duménil, G., Lévy, D., 1987b, *The dynamics of competition*: *A restoration of the classical analysis*, Cambridge Journal of Economics vol. 11, No. 2, s. 133–164.

Duménil, G., Lévy, D., 1989, *The competitive process in a fixed capital environment*: *A classical view*, The Manchester School vol. 57, No. 1, s. 34–57.

Duménil, G., Lévy, D., 1991, *Micro adjustment toward long-term equilibrium*, Journal of Economic Theory vol. 53, No. 2, s. 369–395.

Duménil, G., Lévy, D., 1993, *The Economics of the Profit Rate*: *Competition, Crises and Historical Tendencies in Capitalism*, Edward Elgar Publishing Company.

Kiedrowski, R., 2006, *Równowaga długookresowa w ogólnym modelu konkurencji klasycznej*, w: E. Panek (red.), *Matematyka w ekonomii*, Zeszyty Naukowe, nr 78, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Kiedrowski, R., 2007, *Klasyczna alokacja kapitału w gospodarce konkurencyjnej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Stockey, N.L., Lucas, R.E., Jr., 1989, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press.

Sydsæter, K., Strøm, A., Berck, P., 2000, *Economists' Mathematical Manual*, Springer.

STABILITY OF THE SET OF CLASSICAL EQUILIBRIA IN A MULTISECTORAL GROWTH MODEL WITH HETEROGENEOUS CAPITAL OWNERS

Summary: The author refers to his book devoted to mathematical analysis of the process of profit rates equalization in a growing economy consisting of *n* sectors (enterprises) owned by *m* capitalists, who allocate their capital in the sectors according to profit rates differentials.

From the mathematical point of view this issue is equivalent to the stability analysis of dynamic classical equilibria with identical profit rates in all sectors, which form a continuum of equilibria. The proof of the appropriate stability theorem presented in the quoted book is long and sophisticated, based on a series of lemmas.

The purpose of this paper is to present in a clear and concise manner the key ideas of this proof under simplifying assumption that all capitalists have the same propensity to consume.