

Adam Krawiec

Uniwersytet Jagielloński

DYNAMIKA MODELU WZROSTU GOSPODARCZEGO SOŁOWA Z OPÓŹNIENIEM INWESTYCYJNYM

Streszczenie: W pracy przedstawiono analizę dynamiki modelu Solowa z opóźnieniem inwestycyjnym. Opóźnienie inwestycyjne jest związane z czasem realizacji inwestycji kapitałowych, tak jak zaproponowali to Tinbergen i Kalecki. W badaniu modelu, mającego postać równania różniczkowego z odchylonym argumentem, wykorzystano jakościowe metody analityczne i metody numeryczne. Znaleziono stan stacjonarny w modelu i porównano go z rozwiązaniem modelu Solowa bez opóźnienia, pokazano też zależność od parametrów modelu. Przedstawiono warunki konieczne do wystąpienia cyklicznych rozwiązań (bifurkacja do orbity okresowej). Numerycznie pokazano, że cykl graniczny w modelu jest stabilny.

Słowa kluczowe: wzrost gospodarczy, model Solowa, opóźnienie inwestycyjne, równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem, bifurkacja.

Wprowadzenie

Fundamentem teorii wzrostu gospodarczego jest model Solowa [1996]. Rozwinięcia i modyfikacje tego modelu, szczególnie endogenizacja wiedzy w latach osiemdziesiątych XX wieku, przyczyniły się do szybkiego rozwoju tej teorii [Barro i Sala-i-Martin 2004]. Jednym z kierunków rozszerzenia modelu Solowa jest uwzględnienie opóźnienia inwestycyjnego, które w istotny sposób wpływa na dynamikę akumulacji kapitału. Tinbergen [1931] i Kalecki [1935] stworzyli modele, w których opóźnienie pomiędzy rozpoczęciem inwestycji a ich zakończeniem jest opisane przez równania różniczkowo-różnicowe, inaczej nazywane równaniami różniczkowymi z opóźnionym argumentem [Gandolfo 1980]. Ogól-

nie autonomiczne równanie różniczkowo-różnicowe z opóźnionym argumentem pierwszego rzędu ma postać

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \mathcal{G})),$$

dana jest też funkcja początkowa φ w przedziale $[t_0 - \mathcal{G}, t_0]$ [Hale 1993].

W tych równaniach aktualna zmiana stanu układu wiąże się z przeszłymi wartościami zmiennych. Uwzględnienie czasu budowy dóbr kapitałowych doprowadziło do pojawienia się nowego dynamicznego zachowania, w szczególności cykli. O ile w teorii cyklu koniunkturalnego równania tego typu szybko znalazły zastosowanie, o tyle w teorii wzrostu gospodarczego pojawiały się bardzo rzadko. Jedną z pierwszych prac jest artykuł Asea i Zaka [Asea i Zak 1999]. Badając problem optymalnej konsumpcji w modelu wzrostu, wprowadzili oni opóźnienie inwestycyjne (*time-to-build*) \mathcal{G} do równania na akumulację kapitału

$$\dot{k}(t) = sf(t - \mathcal{G}) - \delta k(t - \mathcal{G}).$$

W artykule przedstawiono analizę dynamiki modelu Solowa z opóźnieniem inwestycyjnym, wykorzystując jakościowe metody analityczne i metody numeryczne. Omówiono zachowanie długookresowe modelu, gdy trajektorie (rozwiązania) zmiernają do stanów asymptotycznych (stanów równowagi), a także zależność rozwiązań modelu od jego parametrów. Porównano rozwiązania modelu z rozwiązaniami oryginalnego modelu Solowa. Pokazano warunki konieczne do wystąpienia cyklicznych rozwiązań (bifurkacja do orbity okresowej).

Model

W literaturze ekonomicznej zwykło się rozważać osobno problemy wzrostu gospodarczego i cyklu koniunkturalnego. W modelach cyklu koniunkturalnego opóźnienie inwestycyjne zostało zaakceptowane jako czynnik wywołujący cykliczne zachowanie w gospodarce. Interesujące jest zbadanie, czy uwzględnienie czasu budowy dóbr kapitałowych prowadzi do złożonej dynamiki również w długim okresie. Model Solowa z opóźnieniem inwestycyjnym, w którym zatrudnienie i wiedza jest stała, był już przedmiotem badań w literaturze. Analiza okresowych rozwiązań w takim modelu została przedstawiona przez Zaka [1999]. Szydłowski i Krawiec szczegółowo zbadali problem istnienia tylko jednego rozwiązania w tym modelu [Szydłowski i Krawiec 2004]. W niniejszym artykule zbadamy model wzrostu z opóźnieniem, w którym siła robocza i wiedza rosną w sposób eksponencjalny.

Rozważmy model, w którym występują trzy czynniki produkcji: zasób kapitału K , pracy L i wiedzy A . Załóżmy, że postęp techniczny jest neutralny w sensie

Harroda (AL to efektywna praca), a strumień produktu Y wytwarzanego w gospodarce jest opisany przez neoklasyczną funkcję produkcji

$$Y = F(K, AL). \quad (1)$$

Załóżmy, że funkcja produkcji ma postać Cobba-Douglasa o stałych efektach skali postaci

$$Y(t) = K^\alpha(t) [A(t)L(t)]^{1-\alpha}, \quad (2)$$

gdzie α i $1 - \alpha$ to odpowiednio elastyczności strumienia produktu względem nakładu kapitału i efektywnej pracy.

Przyjmijmy, że stopy wzrostu pracy L i wiedzy A są stałe i wynoszą odpowiednio n i g . Równania opisujące dynamikę tych czynników produkcji mają postać

$$\dot{L}(t) = nL(t), \quad (3)$$

$$\dot{A}(t) = gA(t), \quad (4)$$

Zmiana zasobu kapitału K jest równa inwestycjom netto, a więc inwestycjom w kapitał rzeczowy pomniejszonym o deprecjację istniejącego zasobu kapitału. W standardowym modelu Solowa zakładamy, że inwestycje, realizowane w chwili t , powodują przyrost zasobu kapitału w tej samej chwili. Oznacza to, że decyzje o inwestycjach, ich realizacja oraz oddanie do użytku odbywają się równocześnie. Zrezygnujmy z tego uproszczenia i załóżmy, że budowa dóbr kapitałowych jest procesem trwającym skończony czas. Przyjmijmy, że średni czas trwania inwestycji w gospodarce wynosi ϑ . Decyzje inwestycyjne albo rozpoczęcie inwestycji występuje w chwili $t - \vartheta$ i do realizacji inwestycji są wykorzystane zasoby czynników produkcji dostępne w tym momencie. Po czasie ϑ inwestycje są zakończone i nowy kapitał staje się produktywny w chwili t . Równanie na akumulację kapitału ma wtedy postać

$$\dot{K}(t) = sY(t - \vartheta) - \delta K(t - \vartheta), \quad (5)$$

gdzie s jest stopą oszczędności, a δ jest stopą deprecjacji kapitału. Inwestycje brutto są równe zaoszczędzonej części dochodu w chwili $t - \vartheta$. To są środki, z których kapitał oddany do użytku w chwili t został sfinansowany. W większości prac poświęconych modelowi Solowa z opóźnieniem deprecjacja kapitału występuje w $t - \vartheta$ [Asea i Zak 1999]. Jeśli jako funkcję produkcji użyjemy funkcję Cobba-Douglasa, równanie akumulacji kapitału ma postać

$$\dot{K}(t) = sK^\alpha(t - \vartheta) [A(t - \vartheta)L(t - \vartheta)]^{1-\alpha} - \delta K(t - \vartheta). \quad (6)$$

Powyższe równanie razem z równaniami (3) i (4) tworzą układ trzech równań różniczkowych, z których jedno jest równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem. Wprowadźmy nowe zmienne: produkt na jednostkę pracy efektywnej y i kapitał na jednostkę pracy efektywnej k

$$y = \frac{Y}{AL}, \quad (7)$$

$$k = \frac{K}{AL}. \quad (8)$$

Z układu równań (3), (4) i (6) otrzymujemy następujące równanie na akumulację kapitału na jednostkę pracy efektywnej

$$\dot{k}(t) = se^{-(n+g)\vartheta} k^\alpha(t-\vartheta) - \delta e^{-(n+g)\vartheta} k(t-\vartheta) - (n+g)k(t). \quad (9)$$

Zamiast wartości początkowej, tak jak w przypadku zwyczajnego równania różniczkowego, konieczne jest przyjęcie funkcji początkowej $\varphi(t)$, zdefiniowanej na całym odcinku czasu określonym przez opóźnienie $k(t) = \varphi(t)$ dla $t \in [-\vartheta, 0]$.

Równanie (9) jest równaniem zmodyfikowanego modelu Solowa, w którym uwzględniono opóźnienie inwestycyjne. Analiza rozwiązań tego modelu będzie przedmiotem dalszych rozważań.

Stan stacjonarny

W stanie stacjonarnym $\dot{k} = 0$ i wartość zmiennej wynosi $k(t-\vartheta) = k(t) = k^*$

$$k^* = \left(\frac{se^{-(n+g)\vartheta}}{n+g+\delta e^{-(n+g)\vartheta}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (10)$$

oraz

$$y^* = \left(\frac{se^{-(n+g)\vartheta}}{n+g+\delta e^{-(n+g)\vartheta}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (11)$$

Wielkości k^* i y^* to odpowiednio zasób kapitału i strumień produktu na jednostkę pracy efektywnej w warunkach długookresowej równowagi. Podobnie jak

w modelu Solowa, w modelu z opóźnieniem wraz ze wzrostem stopy oszczędności kapitał i produkt na jednostkę efektywnej pracy rosną, a wzrost stopy postępu technicznego g , stopy wzrostu liczby pracujących n lub stopy deprecjacji kapitału δ prowadzi do ich spadku. Pojawia się tu jednak nowy parametr ϑ . Uwzględnienie opóźnienia spowodowało, że zasób kapitału i strumień produktu na jednostkę pracy efektywnej jest mniejszy niż w stanie stacjonarnym modelu Solowa. Im większe jest opóźnienie ϑ , tym mniejsze jest k^* i y^* . Obliczmy jak duży jest spadek zasobu kapitału na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu z opóźnieniem inwestycyjnym w stanie stacjonarnym w porównaniu z jego wartością w stanie stacjonarnym w modelu Solowa (modelu z zerowym opóźnieniem inwestycyjnym $\vartheta = 0$)

$$\gamma_k = \frac{k^*(\vartheta = \vartheta_0) - k^*(\vartheta = 0)}{k^*(\vartheta = 0)} = \left(\frac{(n + g + \delta)e^{-(n+g)\vartheta_0}}{n + g + \delta e^{-(n+g)\vartheta_0}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1. \quad (12)$$

Widzimy, że spadek jest tym większy, im większe są wartości parametrów n , g i α . Na przykład gdy $n + g = 0,03$, $\alpha = 0,3$ i $\vartheta = 1$ spadek wynosi 1,6%. Inne wartości zostały przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Procentowy spadek zasobu kapitału na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu Solowa z opóźnieniem w stosunku do zasobu kapitału na jednostkę pracy efektywnej w modelu Solowa bez opóźnienia

	$\vartheta = 0,5$	$\vartheta = 1$	$\vartheta = 3$
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,3$	0,4	0,8	2,8
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,4$	0,5	1,0	2,9
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,3$	0,8	1,6	4,8
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,4$	0,9	1,8	5,6

Podobną analizę możemy przeprowadzić dla produktu na jednostkę pracy efektywnej. Względną zmianę produktu na jednostkę pracy efektywnej w punkcie równowagi długookresowej, jeśli uwzględnimy opóźnienie w stosunku do przypadku, gdy opóźnienie jest zaniedbane, definiujemy jako

$$\gamma_y = \frac{k^*(\vartheta = \vartheta_0) - k^*(\vartheta = 0)}{k^*(\vartheta = 0)} = \left(\frac{(n + g + \delta)e^{-(n+g)\vartheta_0}}{n + g + \delta e^{-(n+g)\vartheta_0}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - 1. \quad (13)$$

Wzrost opóźnienia inwestycyjnego w modelu Solowa obniża wielkość produktu osiąganą w punkcie długookresowej równowagi. Podobnie jak w przypadku zasobu kapitału na jednostkę pracy efektywnej wzrost wartości parametrów n , g i α powoduje obniżenie wielkości produktu na jednostkę pracy efektywnej. Wartości współczynnika γ_y dla przykładowych wartości parametrów zostały przedstawione w tabeli 2.

Tabela 2. Procentowy spadek produktu na jednostkę pracy efektywnej w modelu wzrostu Solowa z opóźnieniem w stosunku do produktu na jednostkę pracy efektywnej w modelu Solowa bez opóźnienia

	$\vartheta = 0,5$	$\vartheta = 1$	$\vartheta = 3$
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,3$	0,1	0,2	0,7
$n = 0,01; g = 0,01; \alpha = 0,4$	0,2	0,4	1,2
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,3$	0,2	0,5	1,5
$n = 0,01; g = 0,02; \alpha = 0,4$	0,4	0,8	2,3

Rozwiązanie cykliczne

W celu analizy własności modelu Solowa z opóźnieniem przeprowadźmy analizę lokalnej stabilności. Zbadanie zachowania układu w otoczeniu punktu krytycznego pozwoli wykazać, czy istnieją rozwiązania cykliczne.

Szukamy szczególnego typu zachowania cyklicznego, które jest reprezentowane przez cykl graniczny. Jest to krzywa w przestrzeni fazowej, która przyciąga lub odpycha (w zależności od tego czy mamy do czynienia ze stabilnym czy niestabilnym cyklem granicznym) trajektorie układu. Jedną z możliwych dróg powstania cyklu granicznego jest utrata stabilności przez punkt krytyczny, w wyniku zmiany wartości parametru modelu. Jest to to znaczy bifurkacja do orbity okresowej.

W rozważanym modelu parametrem bifurkacyjnym jest parametr opóźnienia ϑ . W miarę jak wartość opóźnienia rośnie, dla pewnej wartości tego parametru zanika stan stacjonarny, wokół niego pojawia się cykl graniczny, a w długim okresie cykliczne zachowanie zmiennych modelu.

Aby znaleźć wartość parametru opóźnienia $\vartheta = \vartheta_{bi}$, dla której zachodzi bifurkacja do orbity okresowej, należy wykazać istnienie jedynej pary sprzężonych zespolonych wartości własnych $(\lambda, \bar{\lambda})$, będących rozwiązaniem równania charakterystycznego (9).

W tym celu zlinearyzujemy równanie modelu (9) w punkcie krytycznym (10)

$$\dot{k}(t) = a e^{-(n+g)\vartheta} (k^*)^{\alpha-1} (k - k^*)(t - \vartheta) - \delta e^{-(n+g)\vartheta} (k - k^*)(t - \vartheta) + (n + g)(k - k^*)(t). \quad (14)$$

Wstawiając $k(t) = e^{\lambda t}$ i $k(t-g) = e^{\lambda(t-g)}$ oraz wartość w punkcie krytycznym (10), otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$\left[(\alpha - 1)\delta e^{-(n+g)g} + \alpha(n+g) \right] e^{\lambda g} - (n+g) - \lambda = 0 \quad (15)$$

lub dla uproszczenia zapisu

$$C e^{-\gamma g} - (n+g) - \lambda = 0 \quad (16)$$

gdzie

$$C = (\alpha - 1) \delta e^{-(n+g)g} + \alpha(n+g).$$

Założmy, że wartość własna jest zespolona $\lambda = \sigma + i\omega$, wtedy równanie charakterystyczne (16) separuje się na część rzeczywistą i urojoną

$$C e^{-\sigma g} \cos(\omega g) - (n+g) - \sigma = 0, \quad (17)$$

$$-C e^{-\sigma g} \sin(\omega g) - \omega = 0, \quad (18)$$

gdzie

$$C = (\alpha - 1) \delta e^{-(n+g)g} + \alpha(n+g).$$

Zauważmy również, że układ równań (17)-(18) ma symetrię zwierciadlaną względem zmiany $\omega \rightarrow -\omega$; stąd $\lambda = \sigma + i\omega$ oraz $\lambda = \sigma - i\omega$ są rozwiązaniami tego układu równań. Dlatego bez utraty ogólności możemy założyć, że $\omega > 0$.

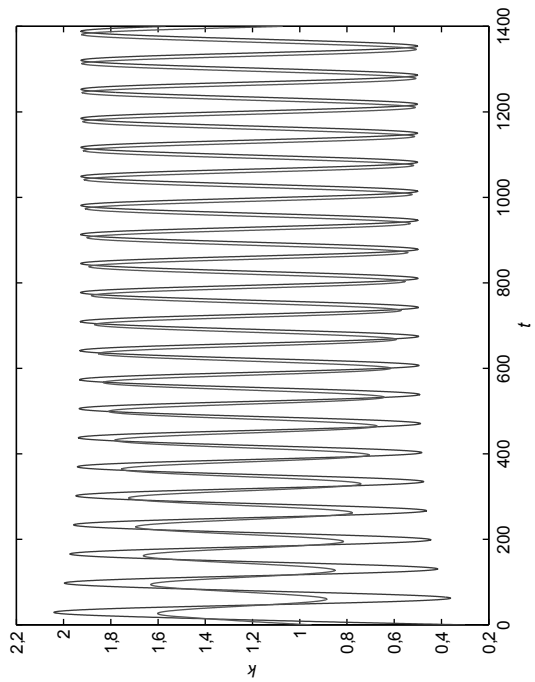
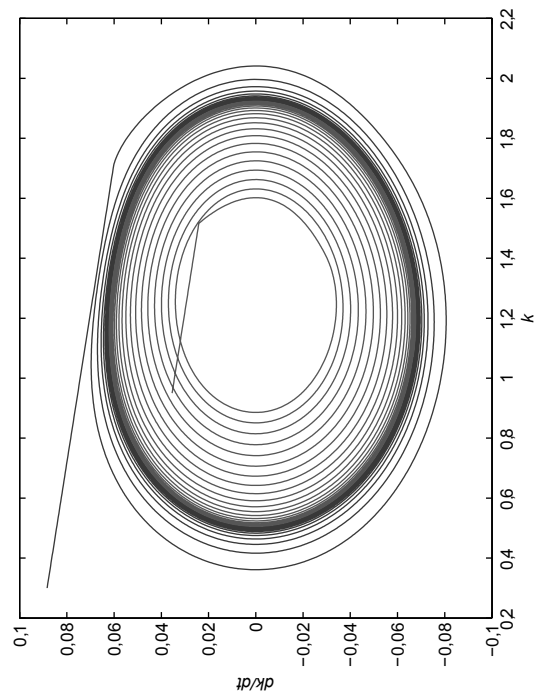
Rozwiązania okresowe są zdeterminowane przez czysto urojone pierwiastki równania charakterystycznego. Niech $\sigma = 0$, wtedy układ równań (17)-(18) przyjmuje postać

$$C \cos(\omega g) - (n+g) = 0, \quad (19)$$

$$-C \sin(\omega g) - \omega = 0. \quad (20)$$

Niech rozwiązaniem układu (19)-(20) będzie (ω_{bi}, g_{bi}) . Podnosząc do kwadratu, dodając stronami i po spierwiastkowaniu otrzymujemy

$$\omega_{bi} = \sqrt{C^2 - (n+g)^2}. \quad (21)$$



Portret fazowy z cyklem granicznym i zależność $k(t)$ w modelu Solowa z opóźnieniem dla dwóch wybranych trajektorii

Takie rozwiązanie istnieje, jeśli $C^2 - (n + g)^2 > 0$. Rozpisanie tego warunku daje następujące ograniczenie:

$$\alpha < \frac{\delta e^{-(n+g)\vartheta} - (n + g)}{\delta e^{-(n+g)\vartheta} + n + g}. \quad (22)$$

Na przykład dla $n = 0,01$, $g = 0,01$, $\delta = 0,05$ oraz $\alpha = 0,3$ warunek jest spełniony, o ile ϑ jest w przybliżeniu mniejsza niż 14.

Następnie wyznaczamy ϑ_{bi} z równań (19) i (20)

$$\vartheta_{bi} - \frac{1}{\sqrt{C^2(\vartheta_{bi}) - (n + g)^2}} \arctg \left(\frac{\sqrt{C^2(\vartheta_{bi}) - (n + g)^2}}{n + g} \right) + m\pi = 0 \quad (23)$$

dla $m = 0, 1, 2, \dots$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy wartość bifurkacyjną parametru opóźnienia ϑ_{bi} . Ekonomiczny sens mają tylko te rozwiązania, dla których okres jest dłuższy niż bifurkacyjna wartość parametru opóźnienia [Frisch, Holme 1935].

Okres oscylacji jest dany przez $P \cong 2\pi/\omega$. W naszym wypadku

$$P = \frac{2\pi}{\omega_{bi}} = \frac{2\pi}{\sqrt{C^2 - (n + g)^2}}. \quad (24)$$

Cykl graniczny można również otrzymać, korzystając z metod numerycznych. Numeryczna analiza modelu została przeprowadzona przy użyciu funkcji *dde23* programu *Matlab*. Na rysunku (str. 277) zostały przedstawione portret fazowy oraz wykres zależności $k(t)$ dla dwóch przykładowych trajektorii ($\alpha = 0,3$, $n = 0,01$, $g = 0,01$, $s = 0,2$, $\delta = 0,15$ i $\vartheta = 19,25$). Jedna z trajektorii rozpoczyna swoją ewolucję wewnątrz obszaru ograniczonego przez krzywą cyklu granicznego, a druga na zewnątrz. Obie zbliżają się do cyklu granicznego i nawijają się na niego. Oznacza to, że cykl graniczny jest cyklem stabilnym.

Wnioski

W pracy przedstawiono analizę dynamiki prostego modelu wzrostu gospodarczego z opóźnieniem inwestycyjnym. Model ten, bazujący na modelu wzrostu gospodarczego Solowa, sformułowano w postaci równania różniczkowego z opóźnionym argumentem. Do zbadania modelu wykorzystano metody analityczne i numeryczne.

Pokazano istnienie stanu stacjonarnego w modelu wzrostu gospodarczego. W tym modelu w stanie stacjonarnym ilość kapitału na jednostkę pracy efektywnej była niższa niż ilość kapitału na jednostkę pracy efektywnej w oryginalnym modelu Solowa.

Wykazano, że dla pewnych wartości parametrów modelu w wyniku bifurkacji do orbity okresowej powstaje cykl graniczny.

Znaleziono numerycznie cykl graniczny w badanym modelu wzrostu gospodarczego. Z analizy numerycznej wynika, że cykl graniczny jest stabilny.

Bibliografia

- Asea, P.K., Zak, P.J., 1999, *Time-to-build and cycles*, Journal of Economic Dynamics and Control 23, s. 1155–1175.
- Barro, R., Sala-i-Martin, X., 2004, *Economic Growth*, wyd. 2, MIT Press, Cambridge, Ma.
- Frisch, R., Holme, H., 1935, *The characteristic solutions of a mixed difference and differential equation occurring in economic dynamics*, Econometrica 3, s. 225–239.
- Gandolfo, G., 1980, *Economic dynamics: Methods and models*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam.
- Hale, J.K., Verduyn Lunel, S.M., 1993, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- Kalecki, M., 1935, *A macroeconomic theory of business cycle*, Econometrica 3, s. 327–344.
- Solow, R.M., 1956, *A contribution to the theory of economic growth*, Quarterly Journal of Economics 70, s. 65–94.
- Szydłowski, M., Krawiec, A., 2004, *A note on Kaleckian lags in the Solow model*, Review of Political Economy 16, s. 501–506.
- Tinbergen, J., 1931, *Ein Schiffbauzyklus?* Weltwirtschaftliches Archiv 34, s. 152–164.
- Zak, P.J., 1999, *Kaleckian lags in general equilibrium*, Review of Political Economy 11, s. 321–330.

THE DYNAMICS OF THE SOLOW MODEL WITH TIME DELAY

Summary: The paper presents the analysis of the dynamics of the Solow model with time delay. This time delay comes from the difference between the investment decisions and delivery of finished capital goods, as was proposed by Tinbergen and Kalecki. The model which has a form of a differential equation with time delay is studied with both analytical and numerical methods. The steady state solution is found in the model and compared with the corresponding solution of the Solow model without time delay. The dependence of the solution on the model parameters was also shown. Conditions for the existing cyclic solution were presented (bifurcation to a periodic orbit). It was shown numerically that the limit cycle obtained in the model is stable.