Piotr Pietraszewski
Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

STABILNOŚĆ STANU STACJONARNEGO W MODELU RAMSEYA-CASSA-KOOPMANSA Z KAPITAŁEM RZECZOWYM I LUDZKIM

Streszczenie: W artykule przedstawiono analizę zbieżności do stanu stacjonarnego w makroekonomicznym modelu optymalnego wzrostu gospodarczego typu Ramseya-Cassa-Koopmansa, w którym oprócz akumulacji kapitału rzeczowego uwzględniono także inwestycje w kapitał ludzki. Zbieżność do stanu stacjonarnego jest kwestią zasadniczą dla wniosków ekonomicznych sformułowanych na bazie tego modelu i jego dalszych rozszerzeń we wcześniejszych publikacjach autora. Celem artykułu jest zatem uzupełnienie podstaw matematycznych tamtejszych analiz. Po zaprezentowaniu struktury modelu podano autorskie dowody twierdzeń o istnieniu, jednoznaczności i globalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego. W uwagach końcowych wskazano możliwości wykorzystania uzyskanych rezultatów analitycznych w dalszych badaniach.

Słowa kluczowe: teoria wzrostu gospodarczego, kapitał ludzki, modele matemtyczne, sterowanie optymalne.

Wprowadzenie

W artykule przeprowadzono analizę globalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego w makroekonomicznym modelu optymalnego wzrostu gospodarczego typu Ramseya-Cassa-Koopmansa, w którym obok akumulacji kapitału rzeczowego uwzględniono także inwestycje w kapitał ludzki. Pewne warianty tego modelu stanowiły podstawę analizy w dwóch dotychczasowych publikacjach autora [Pietraszewski 2009a, s. 173–194 oraz 2009b, s. 105–122). Kwestą kluczową dla sformułowanych tam wniosków natury ekonomicznej jest zbieżność systemu gospodarczego do dodatniego stanu stacjonarnego – tzw. ścieżki wzrostu równomiernego. Prezentowany artykuł uzupełnia podstawy teoretyczne tamtejszych analiz w tym zakresie.

1. Założenia modelu

Rozważamy jednosektorową gospodarkę zamkniętą, w której produkt $Y(t)$ jest wytwarzany zgodnie z agregatową funkcją produkcji:

$$Y(t) = F\left(K(t), H(t), A(t), L(t)\right), \tag{1}$$

gdzie zmienne $K(t)$, $H(t)$, $L(t)$, $A(t)$ oznaczają, odpowiednio, nakłady kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego, pracy „surowej" (nieuwzględniającej rezultatów inwestycji w kapitał ludzki) oraz poziom technologii.

Zmiany w czasie zmiennej $A(t)$ są utożsamiane z postępem techniczno-organizacyjnym, neutralnym w sensie Harroda. Zakładamy, że zmienna ta rośnie wykładniczo z egzogenicznie daną stopą $m > 0$. Zasoby pracy $L(t)$ rosną z założenia również wykładniczo ze stopą $n > 0$. W konsekwencji zasoby tzw. efektywnej pracy $A(t)L(t)$ rosną ze stopą $n + m$.

O funkcji produkcji (1) zakładamy, że:
- jest ciągła, (przynajmniej) dwukrotnie różniczkowalna i wklęsła,
- zerowym nakładom czynników produkcji przyporządkowuje zerowy produkt $F(0, 0, 0) = 0$,
- charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi produktywnościami krańcowymi czynników produkcji: $F_K, F_H, F_L > 0$ i $F_{KK}, F_{HH}, F_{LL} > 0$,
- krańcowa produktywność każdego czynnika rośnie wraz ze wzrostem innego czynnika: $F_{KL}, F_{HL}, F_{KH} > 0$,
- jest dodatnio jednorodna stopnia pierwszego: $F(cK, cH, cAL) = cF(K, H, AL)$,
- spełnia tzw. warunki Inady: $\lim\limits_{X \to 0} F_X = \infty$, $\lim\limits_{X \to \infty} F_X = 0$, gdzie: $X \in \{K, H, L\}$.

Produkt jest dzielony pomiędzy konsumpcję bieżącą $C(t)$ oraz inwestycje w kapitał rzeczowy $I_K(t)$ i ludzki $I_H(t)$ zgodnie z równaniem

$$Y(t) = C(t) + I_K(t) + I_H(t). \tag{2}$$

Niech $s_K(t)$, $s_H(t)$ oznaczają stopy inwestycji w kapitał, odpowiednio, rzeczowy i ludzki:

$$s_K(t) = \frac{I_K(t)}{Y(t)}, \qquad s_H(t) = \frac{I_H(t)}{Y(t)}. \tag{3}$$

Zakładamy także, że zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego podlegają deprecjacji ze stałymi stopami, odpowiednio, δ_K, $\delta_H > 0$. W konsekwencji równania dynamiki tych zmiennych mają następującą postać:

$$\dot{K}(t) = s_K(t)Y(t) - \delta_K K(t),$$
$$\dot{H}(t) = s_H(t)Y(t) - \delta_H H(t). \qquad (4)$$

Przyjmujemy, że celem reprezentatywnego podmiotu ekonomicznego (spełniającego jednocześnie funkcje producenta i konsumenta) jest maksymalizacja łącznej zdyskontowanej chwilowej użyteczności konsumpcji *per capita* w nieskończonym horyzoncie czasu, czyli maksymalizacja funkcjonału:

$$\int_0^\infty u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)e^{-\rho t}\,dt, \qquad \rho > 0, \qquad (5)$$

przy czym funkcja chwilowej użyteczności konsumpcji dana się wzorem

$$u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) = \frac{\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \qquad 0 < \gamma < 1.$$

Parametr γ określa elastyczność zmian krańcowej użyteczności konsumpcji względem poziomu konsumpcji ($\frac{u''(C(t)/L(t))}{u'(C(t)/L(t))} \cdot \frac{C(t)}{L(t)} = -\gamma$). Większy parametr γ oznacza szybszy spadek krańcowej użyteczności w miarę wzrostu konsumpcji, a zatem – przy założeniu o maksymalizacji funkcjonału – charakteryzuje rosnącą skłonność podmiotów do wygładzania poziomu konsumpcji w czasie.

W prezentacjach podstawowego modelu Ramseya-Cassa-Koopmansa (z uwzględnieniem wyłącznie kapitału rzeczowego) w literaturze zwykle dopuszcza się ujemną wartość stopy inwestycji [Aghion i Howitt 1998, s. 17–21; Blanchard i Fisher 1990, s. 37–47; Novales, Fernandez i Ruiz 2009, s. 101-115]. Oznacza to, że uwzględnia się możliwość zamiany kapitału na konsumpcję (w przypadku ujemnej stopy inwestycji), co wydaje się spójne z założeniem o jednorodności produktu, mogącego służyć zarówno jako dobro konsumpcyjne, jak i kapitałowe. Z matematycznego punktu widzenia założenie to upraszcza analizę dynamiki modelu, gdyż usuwa możliwość występowania rozwiązania brzegowego z zerową stopą inwestycji na pewnym początkowym odcinku jej optymalnej trajektorii. Ponieważ model prezentowany w artykule stanowi uogólnienie tamtego modelu, polegające na uwzględnieniu kapitału ludzkiego jako trzeciego czynnika produkcji, o odmiennym od kapitału rzeczowego wkładzie w produkcję, przyjmujemy analogiczne założenie, dopuszczające ujemne stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki. Zauważmy, że oznacza to nie tylko możliwość zamiany dowolnego typu kapitału na konsumpcję, ale również możliwość zamiany jednego typu kapitału na drugi. W konsekwencji zamiast dwóch warunków początkowych, oddzielnie dla obu rodzajów kapitału, zapisujemy jeden warunek początkowy, określający łączne zasoby kapitału, $Z(t) = K(t) + H(t)$, w momencie zero: $Z(0) > 0$.

Przyjmujemy ponadto warunki nieujemności $K(t)$, $H(t)$, $C(t) \geq 0$.

2. Problem optymalizacji dynamicznej

Korzystając z założenia o dodatniej jednorodności stopnia pierwszego, funkcję produkcji (1) możemy przedstawić w kategoriach na jednostkę efektywnej pracy:

$$y(t) = f\left(k(t), h(t)\right), \tag{6}$$

gdzie:

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}, \quad h(t) = \frac{H(t)}{A(t)L(t)}, \quad y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)},$$

oraz $k(t)$, $h(t)$, $y(t) \geq 0$. Przy przyjętych założeniach o funkcji (1), funkcja (6) ma następujące własności [Pietraszewski 2009a, s. 184–185]:

- w1 – charakteryzuje się dodatnimi i malejącymi krańcowymi produktywnościami kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy: $f_k > 0, f_h > 0, f_{kk} < 0, f_{hh} < 0$,
- w2 – spełnia warunki Inady: $\lim_{k\to 0} f_k = \lim_{h\to 0} f_h = \infty,\ \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{h\to\infty} f_h = 0$,
- w3 – zerowym nakładom czynników produkcji przyporządkowuje zerowy produkt: $f(0, 0) = 0$,
- w4 – jest silnie wklęsła.

Korzystając z (6) i (4) oraz przyjętych założeń o stopach wzrostu L i A, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= s_K(t) f\left(k(t), h(t)\right) - (n + m + \delta_K) k(t), \\ \dot{h}(t) &= s_H(t) f\left(k(t), h(t)\right) - (n + m + \delta_H) h(t). \end{aligned} \tag{7}$$

Oznaczmy przez $c(t) = C(t) / A(t)L(t) \geq 0$ konsumpcję na jednostkę efektywnej pracy. Na podstawie (2) i (3) wyraża się ona wzorem:

$$c(t) = \left(1 - s_K(t) - s_H(t)\right) f\left(k(t), h(t)\right). \tag{8}$$

Wyrażając konsumpcję *per capita* w kategoriach konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy, funkcjonał celu (5) można zapisać następująco:

$$\int_0^\infty \frac{\left(A_0 e^{mt} c(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{-\rho t}\, dt = \int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} A_0^{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m-\rho)t}\, dt.$$

Dla zapewnienia zbieżności tej całki zakładamy, że $\rho - (1-\gamma)m > 0$.

Ostatecznie otrzymujemy następujące zadanie sterowania optymalnego:

$$\int_0^\infty \frac{\left(1-s_K(t)-s_H(t)\right)^{1-\gamma} f\left(k(t),h(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m-\rho)t}\, dt \overset{s_K, s_H}{\rightarrow} \max, \ \rho-(1-\gamma)m>0, \tag{9}$$

przy warunkach:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= s_K(t) f\left(k(t),h(t)\right) - (n+m+\delta_K)k(t), \\ \dot{h}(t) &= s_H(t) f\left(k(t),h(t)\right) - (n+m+\delta_H)h(t). \end{aligned} \tag{10}$$

$$z(0) > 0, \tag{11}$$

$$k(t),\ h(t) \ge 0,\ \ 1-s_K(t)-s_H(t) \ge 0, \tag{12}$$

przy czym $z(t) = k(t) + h(t)$. Warunek nieujemności $1 - s_K(t) - s_H(t) \ge 0$ wynika z tego, że $c(t) \ge 0$ oraz z równania (8).

Hamiltonian dla tego problemu przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} H(t) = {} & \frac{\left(1-s_K(t)-s_H(t)\right)^{1-\gamma} f\left(k(t),h(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} e^{((1-\gamma)m-\rho)t} + \\ & + \lambda_K(t)\left[s_K(t) f\left(k(t),h(t)\right) - (n+m+\delta_K)k(t)\right] + \\ & + \lambda_H(t)\left[s_H(t) f\left(k(t),h(t)\right) - (n+m+\delta_H)h(t)\right], \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_K(t)$, $\lambda_H(t)$ to mnożniki Lagrange'a.

Mnożąc obustronnie powyższe równanie przez $e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$, otrzymujemy hamiltonian wartości bieżącej:

$$
\begin{aligned}
H_C(t) = {} & \frac{\left(1-s_K(t)-s_H(t)\right)^{1-\gamma} f\left(k(t),h(t)\right)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \\
& +\theta_K(t)\left[s_K(t)f\left(k(t),h(t)\right)-(n+m+\delta_K)k(t)\right]+ \\
& +\theta_H(t)\left[s_H(t)f\left(k(t),h(t)\right)-(n+m+\delta_H)h(t)\right],
\end{aligned} \tag{13}
$$

gdzie $\theta_K(t)=\lambda_K(t)e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$, $\theta_H(t)=\lambda_H(t)e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ to mnożniki Lagrange'a wartości bieżącej.

Przy założeniu, że $k(t), h(t)>0$, $1-s_K(t)-s_H(t)>0$, warunki konieczne optymalizacji mają postać następującą[1]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_C(t)}{\partial s_K(t)} &= \left(\theta_K(t)-\left(1-s_K(t)-s_H(t)\right)^{-\gamma} f\left(k(t),h(t)\right)^{-\gamma}\right) f\left(k(t),h(t)\right)=0, \\
\frac{\partial H_C(t)}{\partial s_H(t)} &= \left(\theta_H(t)-\left(1-s_K(t)-s_H(t)\right)^{-\gamma} f\left(k(t),h(t)\right)^{-\gamma}\right) f\left(k(t),h(t)\right)=0,
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= \frac{\partial H_C(t)}{\partial \theta_K(t)} = s_K(t)f\left(k(t),h(t)\right)-(n+m+\delta_K)k(t), \\
\dot{h}(t) &= \frac{\partial H_C(t)}{\partial \theta_H(t)} = s_H(t)f\left(k(t),h(t)\right)-(n+m+\delta_H)h(t),
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\theta}_K(t) &= -\frac{\partial H_C(t)}{\partial k(t)} + \theta_K(t)\left(\rho-(1-\gamma)m\right) = \\
&= -\left(1-s_K(t)-s_H(t)\right)^{1-\gamma} f\left(k(t),h(t)\right)^{-\gamma} f_k(t) - \\
&\quad -\theta_K(t)\left(s_K(t)f_k(t)-(n+\delta_K+\rho+\gamma m)\right)-\theta_H(t)s_H(t)f_k(t), \\
\dot{\theta}_H(t) &= -\frac{\partial H_C(t)}{\partial h(t)} + \theta_H(t)\left(\rho-(1-\gamma)m\right) = \\
&= -\left(1-s_K(t)-s_H(t)\right)^{1-\gamma} f\left(k(t),h(t)\right)^{-\gamma} f_h(t) - \\
&\quad -\theta_H(t)\left(s_H(t)f_h(t)-(n+\delta_H+\rho+\gamma m)\right)-\theta_K(t)s_K(t)f_h(t),
\end{aligned} \tag{16}
$$

[1] Przegląd technik teorii sterowania optymalnego, z których korzystamy w dalszej części artykułu, można znaleźć w pracach: [Barro i Sala-i-Martin 1995, s. 498–510; Chiang 2002, s. 163–272]. Zwarte zestawienie wszystkich twierdzeń, z których korzystamy w rozwiązaniu sformułowanego problemu optymalizacyjnego, wraz z odsyłaczami do źródeł oryginalnych, czytelnik polskojęzyczny może znaleźć na przykład w pracy: [Rychłowska-Musiał 2003, s. 16–22].

wraz z warunkami transwersalności

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \lambda_K(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \theta_K(t) e^{((1-\gamma)m-\rho)t} = 0, \\ \lim_{t\to\infty} \lambda_H(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \theta_H(t) e^{((1-\gamma)m-\rho)t} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Z (14) wynika, że zachodzą równania

$$\begin{aligned} \theta_K(t) &= \left(1 - s_K(t) - s_H(t)\right)^{-\gamma} f\left(k(t), h(t)\right)^{-\gamma}, \\ \theta_H(t) &= \left(1 - s_K(t) - s_H(t)\right)^{-\gamma} f\left(k(t), h(t)\right)^{-\gamma}, \end{aligned} \tag{18}$$

zaś stąd:

$$\theta_K(t) = \theta_H(t). \tag{19}$$

Z (19) oraz z zestawienia obu równań (16) wynika, że

$$f_h(t) - \delta_H = f_k(t) - \delta_K. \tag{20}$$

Zgodnie z powyższym równaniem, w rozwiązaniu optymalnym oba typy kapitału osiągają tę samą krańcową produktywność netto (produkt krańcowy pomniejszony o stopę deprecjacji). Z równania (20) wynika, że w każdym momencie *t*, w szczególności w momencie początkowym, zasoby kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy muszą pozostawać względem siebie w określonej proporcji. Dostępny łączny zasób kapitału $Z(0)$ powinien zatem zostać tak rozdzielony, aby w momencie początkowym spełnione było równanie:

$$f_h(0) - \delta_H = f_k(0) - \delta_K.$$

Ze względu na warunki Inady $\lim_{k\to 0} f_k = \lim_{h\to 0} f_h = \infty$ (patrz własność w4) zachodzi przy tym

$$k(0), h(0) > 0.$$

Korzystając z (8) oraz (19), z równań dynamiki (16) mnożników Lagrange'a wartości bieżącej otrzymujemy następujące równania dynamiki konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy:

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{\gamma}\overline{c}(t)\big(f_k(t) - (n + \delta_K + \rho + \gamma m)\big),$$
$$\dot{c}(t) = \frac{1}{\gamma}\overline{c}(t)\big(f_h(t) - (n + \delta_H + \rho + \gamma m)\big). \tag{21}$$

Przy założeniu, że $k(t)$, $h(t) > 0$, $1 - s_K(t) - s_H(t) > 0$, zachodzi także $c(t) > 0$.

Przyrównując prawe strony (15) i (21) do zera oraz korzystając z równania (8), otrzymujemy dwa alternatywne układy równań:

$$\begin{matrix} s_K f(k,h) = (n+m+\delta_K)k, \\ s_H f(k,h) = (n+m+\delta_H)h \end{matrix} \quad \wedge \quad c = (1 - s_K - s_H) f(k,h) = 0 \tag{22}$$

$$\begin{matrix} s_K f(k,h) = (n+m+\delta_K)k, \\ s_H f(k,h) = (n+m+\delta_H)h, \\ c = (1 - s_K - s_H) f(k,h) \end{matrix} \quad \wedge \quad \begin{matrix} f_k = n + \delta_K + \rho + \gamma m, \\ f_h = n + \delta_H + \rho + \gamma m. \end{matrix} \tag{23}$$

Piątka (k_e, h_e, c_e, s_K, s_H) będąca rozwiązaniem układu równań (22) bądź (23), opisuje pewien stan stacjonarny gospodarki, co oznacza, że jeśli gospodarka znajdzie się w tym stanie, zmienne k, h, c, s_K, s_H nie będą podlegać dalszym zmianom.

Z rozwiązania układu równań (22) otrzymujemy:

- punkt (0, 0, 0, s_K, s_H), przy czym s_K, s_H, nie są określone (choć sens merytoryczny mają tylko wartości zerowe),
- zbiór punktów (k_1, h_1, 0, s_K, $1 - s_K$), gdzie para k_1, $h_1 > 0$ spełnia równanie

$$f(k_1, h_1) = (n + m + \delta_K)\, k_1 + (n + m + \delta_H)\, h_1, \tag{24}$$

a s_K spełnia równanie $s_K f(k_1, h_1) = (n + m + \delta_K)k_1$.

Oznaczmy przez k_e^*, h_e^*, c_e^*, s_K^*, s_H^* rozwiązanie układu równań (23).

Twierdzenie 1. *Stan stacjonarny* k_e^*, h_e^*, c_e^*, s_K^*, s_H^* *istnieje i jest określony jednoznacznie oraz* k_e^*, h_e^*, c_e^*, s_K^*, $s_H^* > 0$.

Dowód. Ze względu na to, że funkcja $f(k, h)$ jest silnie wklęsła i zeruje się w punkcie (0, 0) (zob. własności w3, w4) oraz spełnia warunki Inady (własność w3), punkt (k_e^*, h_e^*), będący rozwiązaniem układu równań: $f_k = n + \delta_K + \rho + \gamma m$, $f_h = n + \delta_H + \rho + \gamma m$, stanowi jedyne maksimum globalne silnie wklęsłej funkcji $G(k, h)$, postaci:

$$G(k,h) = f(k,h) - (n + \delta_K + \rho + \gamma m)k - (n + \delta_H + \rho + \gamma m)h \tag{25}$$

oraz

$$f(k_e^*, h_e^*) > (n + \delta_K + \rho + \gamma m)k_e^* + (n + \delta_H + \rho + \gamma m)h_e^*. \tag{26}$$

Z równań: $s_K^* f(k_e^*, h_e^*) = (n + m + \delta_K)k_e^*$, $\quad s_H^* f(k_e^*, h_e^*) = (n + m + \delta_H)h_e^*$ wnioskujemy następnie, że $s_K^*, s_H^* > 0$. Sumując te równania stronami, otrzymujemy:

$$(s_K^* + s_H^*) f(k_e^*, h_e^*) = (n + \delta_K + m)k_e^* + (n + \delta_H + m)h_e^*.$$

Porównując uzyskane równanie z nierównością (26), ze względu na założenie $\rho - (1 - \gamma)m > 0$ (patrz (9)) wnioskujemy, że

$$f(k_e^*, h_e^*) > (n + \delta_K + \rho + \gamma m)k_e^* + (n + \delta_H + \rho + \gamma m)h_e^* >$$
$$> (n + \delta_K + m)k_e^* + (n + \delta_H + m)h_e^* = (s_K^* + s_H^*) f(k_e^*, h_e^*),$$

czyli

$$s_K^* + s_H^* < 1 \text{ oraz } c_e^* = (1 - s_K^* - s_H^*) f(k_e^*, h_e^*) > 0. \quad \blacksquare$$

Wykażemy, że funkcje $k^*(t), h^*(t), c^*(t), s_K^*(t), s_H^*(t)$, będące rozwiązaniem zadania (9)-(12), z upływem czasu zmierzają do wartości w stanie stacjonarnym[2] $k_e^*, h_e^*, c_e^*, s_K^*, s_H^*$.

W tym celu udowodnimy najpierw dwa twierdzenia pomocnicze.

Lemat 1. *Zachodzą następujące implikacje*:

$$f_k - (n + \delta_K + \rho + \gamma m) > 0 \ \wedge \ f_h - (n + \delta_H + \rho + \gamma m) > 0 \ \rightarrow \ k < k_e^* \ \wedge \ h < h_e^*, \tag{27}$$

$$f_k - (n + \delta_K + \rho + \gamma m) < 0 \ \wedge \ f_h - (n + \delta_H + \rho + \gamma m) < 0 \ \rightarrow \ k > k_e^* \ \wedge \ h > h_e^*. \tag{28}$$

Dowód. Ze względu na silną wklęsłość funkcja $G(k, h)$ dana przez (25) charakteryzuje się następującymi własnościami:

$$G_{kk}, G_{hh} < 0, \quad G_{kh} = G_{hk} > 0, \quad G_{kk} \cdot G_{hh} - G_{kh} \cdot G_{hk} > 0.$$

[2] W literaturze analiza zbieżności gospodarki do stanu stacjonarnego w podstawowym modelu Ramseya-Cassa-Koopmansa (z jednym rodzajem kapitału) jest przeprowadzana graficznie z użyciem portretu fazowego [Aghion i Howitt 1998; Barro i Sala-i-Martin 1995; Blanchard i Fisher 1990; Novales, Fernandez i Ruiz 2009].

Na podstawie równań określających warunek konieczny maksymalizacji tej funkcji: $G_k = 0$, $G_h = 0$, wyznaczamy funkcje uwikłane, odpowiednio, $h = g_1(k)$, $h = g_2(k)$. Z własności funkcji oraz twierdzenia o funkcji $G(k, h)$ uwikłanej wynika, że

$$g_1'(k) = -\frac{G_{kk}}{G_{kh}} > 0 \qquad \text{oraz} \qquad g_2'(k) = -\frac{G_{hk}}{G_{hh}} > 0,$$

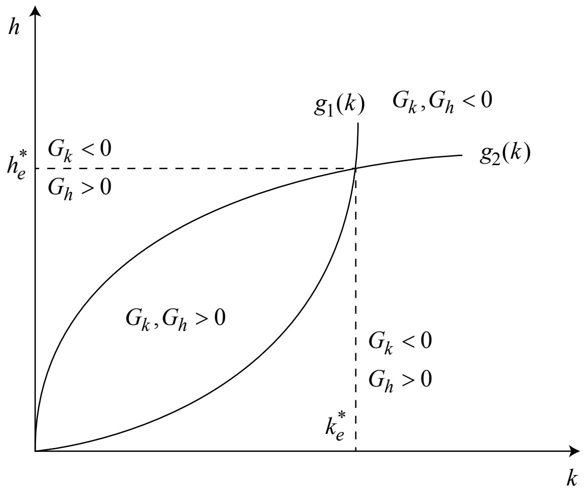
dla dowolnego $k > 0$, oraz

$$-\frac{G_{kk}(k_e^*, h_e^*)}{G_{kh}(k_e^*, h_e^*)} > -\frac{G_{hk}(k_e^*, h_e^*)}{G_{hh}(k_e^*, h_e^*)} \quad \Leftrightarrow \quad g_1'(k_e^*) > g_2'(h_e^*). \tag{29}$$

Z własności funkcji $G(k, h)$ wynika ponadto, że dla dowolnego ustalonego k zachodzi

$$\begin{array}{llllll} G_k > 0 & \text{dla} & h > g_1(k), & G_k < 0 & \text{dla} & h < g_1(k), \\ G_h < 0 & \text{dla} & h > g_2(k), & G_h > 0 & \text{dla} & h < g_2(k). \end{array} \tag{30}$$

Wszystkie powyższe ustalenia podsumowujemy na zamieszczonym niżej rysunku



Warto zaznaczyć, że na rysunku nie jest istotny dokładny kształt krzywych $g_1(k)$, $g_2(k)$. Ważne jest jedynie to, że krzywe te spełniają warunki (29), (30) i przecinają się tylko w jednym punkcie.

Z rysunku odczytujemy, że prawdziwe są implikacje:

$$G_k, G_h > 0 \quad \rightarrow \quad k < k_e^* \wedge h < h_e^*,$$
$$G_k, G_h < 0 \quad \rightarrow \quad k > k_e^* \wedge h > h_e^*,$$

równoważne odpowiednim implikacjom w (27)-(28). ■

Lemat 2. *Zachodzą następujące nierówności*:

$$k_e^* < k_1, \qquad h_e^* < h_1, \tag{31}$$

gdzie k_1, h_1 *są dane przez* (24).

Dowód. Z równania (24) wynika, że $f_h(k_1, h_1) = n + m + \delta_H$, $f_k(k_1, h_1) = n + m + \delta_K$. Ze względu na założenie $\rho - (1 - \gamma)m > 0$ (patrz (9)) spełnione są nierówności:

$$f_k(k_1, h_1) < n + \delta_K + \rho + \gamma m < 0 \quad \wedge \quad f_h(k_1, h_1) < n + \delta_H + \rho + \gamma m.$$

Stąd oraz z (28) wynika (31). ■

Twierdzenie 2. *Stan stacjonarny* (k_e^*, h_e^*, c_e^*, s_K^*, s_H^* > 0) *jest globalnie asymptotycznie stabilny.*

Dowód. Załóżmy, że funkcje $k(t)$, $h(t)$, $c(t)$, $s_K(t)$, $s_H(t)$ są rozwiązaniem zadania (9)-(12) (dla uproszczenia zapisu pomijamy gwiazdki).

Po obustronnym zróżniczkowaniu równania (20) względem czasu otrzymujemy

$$f_{kk}\,\dot{k}(t) + f_{kh}\,\dot{h}(t) = f_{hk}\,\dot{k}(t) + f_{hh}\,\dot{h}(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{h}(t) = \frac{f_{hk} - f_{kk}}{f_{kh} - f_{hh}}\dot{k}(t).$$

Z założeń o funkcji produkcji wynika, że: $\frac{f_{hk} - f_{kk}}{f_{kh} - f_{hh}} > 0$. Zatem

$$\operatorname{sgn}\dot{k}(t) = \operatorname{sgn}\dot{h}(t). \tag{32}$$

Z równań (21) dynamiki konsumpcji na jednostkę efektywnej pracy wnioskujemy także, że

$$\operatorname{sgn}\dot{c}(t) = \operatorname{sgn}\big(f_k - (n + \delta_K + \rho + \gamma m)\big) = \operatorname{sgn}\big(f_h - (n + \delta_H + \rho + \gamma m)\big). \tag{33}$$

Z definicji punktu (k_e^*, h_e^*) wynika, że stanowi on maksimum globalne silnie wklęsłej funkcji, postaci (patrz dowód lematu 1):

$$f\big(k(t), h(t)\big) - (n + \delta_K + \rho + \gamma m)k(t) - (n + \delta_H + \rho + \gamma m)h(t).$$

Stąd oraz z (33) i (27)–(28) wnioskujemy, że:

$$\begin{aligned} \dot{c}(t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k(t) = k_e^* \quad &&\Leftrightarrow \quad h(t) = h_e^*, \\ \dot{c}(t) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k(t) > k_e^* \quad &&\Leftrightarrow \quad h(t) > h_e^*, \\ \dot{c}(t) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < k(t) < k_e^* \quad &&\Leftrightarrow \quad 0 < h(t) < h_e^*. \end{aligned} \tag{34}$$

Dalszą część dowodu przeprowadzimy w dwóch etapach.

1. Załóżmy najpierw, że istnieją takie $\overline{\tau}_1, \overline{\tau}_2 > 0$, że

$$\begin{aligned} &\dot{k}(t) \geq 0, \ \text{dla} \ \ t > \overline{\tau}_1 \qquad \text{lub} \qquad \dot{k}(t) \leq 0, \ \text{dla} \ \ t > \overline{\tau}_1, \\ &\dot{c}(t) \geq 0, \ \text{dla} \ \ t > \overline{\tau}_2 \qquad \text{lub} \qquad \dot{c}(t) \leq 0, \ \text{dla} \ \ t > \overline{\tau}_2, \end{aligned} \tag{35}$$

oraz

$$\lim_{t\to\infty} k(t) \neq \pm\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} h(t) \neq \pm\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} c(t) \neq \pm\infty. \tag{36}$$

Z (36)–(35) oraz z (32) wnioskujemy, że zachodzi zbieżność:

$$\dot{k}(t) \underset{t}{\rightarrow} 0, \qquad \dot{h}(t) \underset{t}{\rightarrow} 0, \qquad \dot{c}(t) \underset{t}{\rightarrow} 0.$$

Stąd oraz z (22) i (23) wynika, że:

(a) albo $\big(k(t), h(t), c(t),\ s_K(t), s_H(t)\big) \underset{t}{\rightarrow} (0, 0, 0, 0, 0)$,

(b) albo $\big(k(t), h(t), c(t),\ s_K(t), s_H(t)\big) \underset{t}{\rightarrow} (k_1, h_1, 0, s_K, 1 - s_K)$,

(c) albo $\big(k(t), h(t), c(t),\ s_K(t), s_H(t)\big) \underset{t}{\rightarrow} (k_e^*, h_e^*, c_e^*, s_K^*, s_H^*)$.

Wykażemy, że (a) i (b) nie są możliwe.

1.1. Załóżmy, że $c(t) > 0$ oraz zachodzi (25).
Ponieważ $k(0)$, $h(0) > 0$, zatem istnieje takie (dowolnie duże) $\tau > 0$, dla którego

$$0 < k(\tau) < k_e^*, \quad h(\tau) > 0, \quad \dot{k}(\tau) < 0, \tag{37}$$

lub

$$0 < h(\tau) < h_e^*, \quad k(\tau) > 0, \quad \dot{h}(\tau) < 0. \tag{38}$$

Rozważmy pierwszą sytuację.

Z (34) oraz (37) wynika, że $0 < h(\tau) < h_e^*$ oraz $\dot{c}(\tau) > 0$. Ponadto z (32) wnioskujemy, że $\dot{h}(\tau) < 0$, czyli $\dot{k}(\tau) + \dot{h}(\tau) < 0$.

Wykażemy, że dla $k(t)$, $h(t) > 0$ zachodzi

$$\dot{k}(t) + \dot{h}(t) < 0 \quad \text{dla} \quad t \geq \tau. \tag{39}$$

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje taki moment $\tau_1 > \tau$, że

$$\dot{k}(\tau_1) + \dot{h}(\tau_1) = 0 \quad \text{oraz} \quad \dot{k}(t) + \dot{h}(t) < 0 \quad \text{dla} \quad \tau \leq t < \tau_1. \tag{40}$$

Wtedy, ze względu na (32), zachodzi

$$\dot{k}(t) < 0, \ \dot{h}(t) < 0, \quad \text{dla} \quad \tau \leq t < \tau_1. \tag{41}$$

Ponieważ $0 < k(\tau) < k_e^*$, $0 < h(\tau) < h_e^*$, więc z (41) i z (34) wynika, że

$$\dot{c}(t) > 0 \quad \text{dla} \quad \tau \leq t < \tau_1, \tag{42}$$

czyli

$$c(\tau_1) > c(\tau). \tag{43}$$

Nierówność tę wykorzystamy dalej do wykazania, że (40) prowadzi do sprzeczności.

Sumując stronami równania (15) dynamiki kapitału rzeczowego i ludzkiego na jednostkę efektywnej pracy, dostajemy

$$\dot{k}(t) + \dot{h}(t) = f\left(k(t), h(t)\right) - (n + m + \delta_K)k(t) - (n + m + \delta_H)h(t) - c(t). \tag{44}$$

Z definicji punktu (k_e^*, h_e^*) oraz z tego, że funkcja $f(k, h)$ jest silnie wklęsła i zeruje się w punkcie (0, 0) wynika, że dla $0 < k < k_e^*$, $0 < h < h_e^*$ zachodzi

$$\Psi\big(k(t),h(t)\big) = f\big(k(t),h(t)\big) - (n+m+\delta_K)k(t) - (n+m+\delta_H)h(t) > 0. \quad (45)$$

Ponieważ $0 < k(\tau) < k_e^*$, $0 < h(\tau) < h_e^*$, oraz $\dot{k}(\tau) + \dot{h}(\tau) < 0$, zatem z (44) i (45) wynika, że

$$c(\tau) > \Psi\big(k(\tau),h(\tau)\big). \quad (46)$$

Jednocześnie, ponieważ $\dot{k}(t) < 0$, $\dot{h}(t) < 0$, dla $\tau \le t < \tau_1$ (patrz (41)) oraz $\dot{k}(\tau_1) + \dot{h}(\tau_1) = 0$ (patrz (40)), więc z (44) i (45) wynika, że

$$c(\tau_1) = \Psi\big(k(\tau_1), h(\tau_1)\big). \quad (47)$$

Z nierówności (43), (46) i (47) wynika, że:

$$\Psi\big(k(\tau_1),h(\tau_1)\big) > \Psi\big(k(\tau),h(\tau)\big). \quad (48)$$

Z drugiej strony, obliczając pochodną funkcji $\Psi\big(k(t), h(t)\big)$ względem czasu, otrzymujemy

$$\dot{\Psi}\big(k(t), h(t)\big) = \big(f_k - (n+m+\delta_K)\big)\dot{k}(t) + \big(f_h - (n+m+\delta_H)\big)\dot{h}(t). \quad (49)$$

Z (41) i (42), ze względu na (33) wynika, że

$$\dot{\Psi}\big(k(t), h(t)\big) < 0 \quad \text{dla} \quad \tau \le t < \tau_1.$$

Zatem $\Psi\big(k(\tau_1), h(\tau_1)\big) < \Psi\big(k(\tau), h(\tau)\big)$, co prowadzi do sprzeczności z (48).

Z uzyskanej sprzeczności wynika, że dla $k(t)$, $h(t) > 0$ zachodzi (patrz (39))

$$\dot{k}(t) + \dot{h}(t) < 0 \quad \text{dla} \quad t \ge \tau.$$

Wtedy, ze względu na (32), zachodzi również

$$\dot{k}(t) < 0, \quad \dot{h}(t) < 0 \quad \text{dla} \quad t \ge \tau, \quad (50)$$

Ponieważ $0 < k(\tau) < k_e^*,\quad 0 < h(\tau) < h_e^*$, zatem z (50), (34), (33) i (49) wynika, że dla $k(t)$, $h(t) > 0$ zachodzi

$$\dot{c}(t) > 0, \quad \dot{\Psi}\left(k(t), h(t)\right) < 0, \quad \text{dla} \quad t \geq \tau, \tag{51}$$

Różniczkując równanie (44) względem czasu, otrzymujemy

$$\frac{d\dot{k}(t)}{dt} + \frac{d\dot{h}(t)}{dt} = \dot{\Psi}\left(k(t), h(t)\right) - \dot{c}(t). \tag{52}$$

Na podstawie (51), z (52) wnioskujemy, że dla $k(t)$, $h(t) > 0$ zachodzi

$$\frac{d\dot{k}(t)}{dt} + \frac{d\dot{h}(t)}{dt} < 0, \quad \text{dla} \quad t \geq \tau \quad .$$

Ostatnia nierówność świadczy o tym, że istnieje taki moment $\tau < t' < \infty$, w którym $k(t') + h(t') = 0$. Z warunków nieujemności $k(t)$, $h(t) > 0$ i równania (44) wynika, że w momencie t' musi być także spełniona równość $c(t') = 0$, co jest jednak sprzeczne z założeniem $c(\tau) > 0$ i (51).

W analogiczny sposób dowodzimy, że do sprzeczności prowadzi założenie (38).

1.2. Wykażemy, że $c(t) > 0$.

W zadaniu (9)-(12) zarówno funkcja podcałkowa, jak i równania ruchu zmiennych stanu nie zawierają (z wyjątkiem czynnika dyskontującego) jako oddzielnego argumentu zmiennej czasu. W tego typu zadaniach sterowania optymalnego (nazywanych problemami autonomicznymi) w rozwiązaniu optymalnym hamiltonian wartości bieżącej przyjmuje stałą wartość w czasie [Chiang 2002, s. 189–190, 211, 239–240].

Korzystając z (8) i (18), możemy zapisać hamiltonian wartości bieżącej (13) w postaci następującej:

$$H_C(t) = \frac{\gamma c(t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} + c(t)^{-\gamma}\left[f\left(k(t), h(t)\right) - (n + m + \delta_K)k(t) - (n + m + \delta_H)h(t)\right].$$

Podstawiając dowolne skończone wartości zmiennych k, h, $c > 0$, otrzymujemy skończoną wartość H_C. Natomiast dla $c(t) \underset{t\to\tau}{\longrightarrow} 0$ oraz $\left(k(\tau), h(\tau)\right) \neq (k_1, h_1)$ (pominięty przypadek rozpatrzymy w punkcie 1.3) otrzymujemy $H_C(t) \underset{t\to\tau}{\longrightarrow} \infty$. Oznacza to, że w rozwiązaniu optymalnym gospodarka nie może osiągnąć zerowej konsumpcji w skończonym czasie.

Z punktów 1.1 i 1.2 dowodu wynika, że gospodarka startująca z $k(0), h(0) > 0$ nigdy nie zbiega do stanu stacjonarnego (0, 0, 0, 0, 0).

1.3. Wykażemy teraz, że ze względu na warunki transwersalności (17) nie jest możliwa zbieżność

$$\left(k(t), h(t), c(t), s_K(t), s_H(t)\right) \xrightarrow[t]{} (k_1, h_1, 0, s_K, 1 - s_K).$$

Z (33), definicji k_1, h_1 oraz z tego, że funkcja $f(k, h)$ jest silnie wklęsła i zeruje się w punkcie (0, 0) wynika, że dla $k(t) \to k_1$, $h(t) \to h_1$ zachodzą nierówności

$$f_k < n + m + \delta_K, \quad f_h < n + m + \delta_H.$$

Wówczas jednak z definicji mnożników Lagrange'a wartości bieżącej $\theta_K = \lambda_K e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$, $\theta_H = \lambda_H e^{(\rho-(1-\gamma)m)t}$ oraz ich równań dynamiki (16) otrzymujemy

$$\frac{\dot{\lambda}_K(t)}{\lambda_K(t)} = n + m + \delta_K - f_k > 0, \qquad \frac{\dot{\lambda}_H(t)}{\lambda_H(t)} = n + m + \delta_H - f_h > 0,$$

co jest sprzeczne z warunkami transwersalności (17).

Z punktów 1.1–1.3 wynika, że przy założeniu (36) zachodzi

$$\left(k(t), h(t), c(t), s_K(t), s_H(t)\right) \xrightarrow[t]{} (k_e^*, h_e^*, c_e^*, s_K^*, s_H^*).$$

2. Wykażemy teraz, że spełnione jest założenie (35)-(36) w punkcie 1.

Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy zachodzi (przynajmniej) jedna z następujących sytuacji:

a) $\lim_{t\to\infty} k(t) = -\infty$ lub $\lim_{t\to\infty} h(t) = -\infty$, lub $\lim_{t\to\infty} c(t) = -\infty$,

b) $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$ lub $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$,

c) $\lim_{t\to\infty} c(t) = \infty$,

d) nie istnieje takie $\overline{\tau} > 0$, że dla $t > \overline{\tau}$: $\dot{k}(t) \le 0$ lub dla $t > \overline{\tau}$: $\dot{k}(t) \ge 0$
albo
nie istnieje takie $\overline{\tau} > 0$, że dla $t > \overline{\tau}$: $\dot{c}(t) \le 0$ lub dla $t > \overline{\tau}$: $\dot{c}(t) \ge 0$.

2.1. Ze względu na warunki nieujemności dla k, h i c wykluczamy a).

2.2. Na podstawie równania (44), postaci

$$\dot{k}(t)+\dot{h}(t)=f\left(k(t),h(t)\right)-(n+m+\delta_K)k(t)-(n+m+\delta_H)h(t)-c(t),$$

silnej wklęsłości $f(k, h)$, warunków Inady $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = \lim\limits_{h\to\infty} f_h = 0$ oraz warunku nieujemności dla c, wykluczamy b).

2.3. Z warunków nieujemności dla k, h i równania (44) wynika, że w sytuacji c) musiałoby zachodzić

$$\lim_{t\to\infty}\left(f\left(k(t),h(t)\right)-(n+m+\delta_K)k(t)-(n+m+\delta_H)h(t)\right)=\infty.$$

To jest jednak niemożliwe z powodu silnej wklęsłości funkcji $f(k, h)$ i warunków Inady: $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = \lim\limits_{h\to\infty} f_h = 0.$

2.4. Rozważmy sytuację d).

2.4.1. Załóżmy najpierw, że dla pewnego $\tau > 0$ zachodzi: $\dot{k}(\tau)+\dot{h}(\tau)<0$ oraz $\dot{c}(\tau)>0$. Z (34) wynika, że

$$0<k(\tau)<k_e^*, \quad 0<h(\tau)<h_e^*,$$

a z (32) – że

$$\dot{k}(\tau),\ \dot{h}(\tau)<0.$$

Wnioskowanie analogiczne do przeprowadzonego w punkcie 1.1 prowadzi do sprzeczności.

2.4.2. Załóżmy teraz, że dla pewnego $\tau > 0$ zachodzi

$$\begin{aligned}&\dot{k}(\tau)+\dot{h}(\tau)>0,\\&\dot{c}(\tau)<0.\end{aligned}\tag{53}$$

Z (34) i (53) wynika, że

$$k(\tau)>k_e^*,\ h(\tau)>h_e^*,\tag{54}$$

a z (32) – że

$$\dot{k}(\tau),\ \dot{h}(\tau)>0.$$

Rozpatrzymy dwa przypadki.

2.4.2.1. Załóżmy, że istnieje takie $\tau' > \tau$, że

$$\begin{aligned}
&\dot{k}(t) \geq 0 \quad \text{dla} \quad \tau < t < \tau', \\
&\dot{k}(\tau') = 0, \\
&\dot{k}(t) < 0 \quad \text{dla} \quad \tau' < t < \tau' + \varepsilon,
\end{aligned} \tag{55}$$

dla pewnego (dowolnie małego) $\varepsilon > 0$.

Z (32) wynika także, że

$$\begin{aligned}
&\dot{h}(t) \geq 0 \quad \text{dla} \quad \tau < t < \tau', \\
&\dot{h}(\tau') = 0, \\
&\dot{h}(t) < 0 \quad \text{dla} \quad \tau' < t < \tau' + \varepsilon.
\end{aligned} \tag{56}$$

Z (54) i (55) oraz z (56) wnioskujemy, że $k(t) > k_e^*$, $h(t) > h_e^*$, dla $\tau \leq t \leq \tau'$, a stąd oraz z (34), że

$$\dot{c}(t) < 0 \quad \text{dla} \quad \tau \leq t \leq \tau'. \tag{57}$$

Z (55)-(56), (57) i (33) oraz równania (52), postaci

$$\frac{d\dot{k}(t)}{dt} + \frac{d\dot{h}(t)}{dt} = \dot{\Psi}\big(k(t), h(t)\big) - \dot{c}(t),$$

gdzie

$$\dot{\Psi}\big(k(t), h(t)\big) = \big(f_{\bar{k}} - (n + m + \delta_K)\big)\dot{k}(t) + \big(f_h - (n + m + \delta_H)\big)\dot{h}(t) \quad \text{(zob. (49))},$$

wynika wówczas, że:

$$\frac{d\dot{k}(\tau')}{dt} + \frac{d\dot{h}(\tau')}{dt} > 0,$$

co prowadzi do sprzeczności z (55) i (56).

Analogicznie wnioskujemy, zamieniając $\dot{k}(t)$ na $\dot{\bar{h}}(t)$ w założeniach (55).

2.4.2.2. Załóżmy, że istnieje takie $\tau' > \tau$, że:

$$\begin{aligned} &\dot{c}(t) \leq 0 \quad \text{dla} \quad \tau < t < \tau', \\ &\dot{c}(\tau') = 0, \\ &\dot{c}(t) > 0 \quad \text{dla} \quad \tau' < t < \tau' + \varepsilon, \end{aligned} \tag{58}$$

dla pewnego (dowolnie małego) $\varepsilon > 0$.

Z (58) i (34) wynika, że $0 < k(t) < k_e^*$, $0 < h(t) < h_e^*$ dla $\tau' < t < \tau' + \varepsilon$. To jest jednak niemożliwe na mocy (54) i 2.4.2.1.

Z 2.4.1. i 2.4.2. oraz równości (32) wynika, że dla $t > 0$ musi zachodzić: $\dot{k}(t), \dot{h}(t), \dot{c}(t) \geq 0$ lub $\dot{k}(t), \dot{h}(t), \dot{c}(t) \leq 0$. Stąd zaś wynika, że istnieje takie $\overline{\tau} > \tau$, że: $\dot{k}(\overline{\tau}), \dot{h}(\overline{\tau}), \dot{c}(\overline{\tau}) = 0$, co pozostaje w sprzeczności z założeniem wyjściowym w punkcie 2.

Uzyskana sprzeczność kończy dowód tezy (35)–(36). ■

Uwagi końcowe

W przeprowadzonej analizie przyjęto konkretną postać funkcji chwilowej użyteczności konsumpcji, tzw. funkcję typu CRRA. Uzyskane rezultaty analityczne mogą być jednak uogólnione na przypadek pewnej klasy funkcji użyteczności, charakteryzujących się dodatnią i malejącą użytecznością krańcową oraz spełniających warunki Inady (tzw. dobrze zachowujące się funkcje użyteczności).

Dowód twierdzenia o globalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego można także wykorzystać jako zasadniczy fragment analizy stabilności w modelu z narzuconymi warunkami nieujemności na stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i ludzki, w którym pojawia się dodatkowy problem rozwiązania brzegowego w początkowej fazie optymalizacji. Naturalnym uogólnieniem modelu jest także uwzględnienie większej liczby możliwych typów kapitału różniących się wkładem w produkcję dobra finalnego.

W prezentowanym modelu założono ogólną postać neoklasycznej funkcji produkcji, dopuszczającą zmiany w udziale poszczególnych czynników wytwórczych w produkcie. Pozwala to autorowi traktować uzyskane rezultaty analityczne jako jeden z istotnych etapów w budowie modelu endogenicznego wzrostu gospodarczego indukowanego przez sekularne zmiany w strukturze popytu w kierunku dóbr, w produkcji których coraz większego znaczenia nabiera kapitał ludzki jako czynnik podlegający akumulacji, kosztem czynnika niepodlegającego akumulacji, jakim w modelu jest praca „surowa”. Budowa takiego modelu wymaga ponadto przeniesienia rozważań na grunt gospodarki konkurencyjnej z wyodrębnionymi sektorami gospodarstw domowych i przedsiębiorstw.

Bibliografia

Aghion, P., Howitt, P., 1998, *Endogenous Growth Theory*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Barro, R.J., Sala-i-Martin, X., 1995, *Economic Growth*, McGraw – Hill Inc., New York

Blanchard, O.J., Fisher, S., 1990, *Lectures on Macroeconomics*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Chiang, A.C., 2002, *Elementy dynamicznej optymalizacji*, tłum. H. Hałaburda, P. Kuszewski, A. Sławski, Dom Wydawniczy ELIPSA, Warszawa.

Novales, A., Fernandez, E., Ruiz, J., 2009, *Economic Growth, Theory and Numerical Solution Methods*, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg.

Pietraszewski, P., 2009, *A mechanics of long-term economic growth – generalized neoclassical approach*, w: E. Panek (red.), *Mathematics in Economics*, Zeszyty Naukowe nr 112, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań, s. 180–204.

Pietraszewski, P., 2009a, *Analiza możliwości oddziaływania państwa na wzrost gospodarczy w kontekście zagadnienia maksymalizacji dobrobytu*, Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny R. LXXI, z. 4, Poznań, s. 173–194.

Pietraszewski, P., 2009b, *Uwagi o „złotej regule" akumulacji kapitału rzeczowego i ludzkiego w kontekście zagadnienia maksymalizacji dobrobytu*, Ruch Prawniczy, Ekonomiczny i Socjologiczny R. LXXI, z. 1, Poznań, s. 105–122.

Rychłowska-Musiał, E., 2003, *Optymalne strategie rozwoju firmy w świetle teorii sterowania*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

STABILITY OF THE STEADY STATE IN THE RAMSEY-CASS--KOOPMANS MODEL WITH THE REAL AND HUMAN CAPITAL

Summary: The subject of the paper is the analysis of convergence to the steady state in the macroeconomic optimal economic growth model of Ramsey-Koopmans-Cass type, in which (besides the accumulation of the real capital) investments in the human capital were taken into consideration. The convergence of the economy to the steady state is crucial for the economic conclusions formulated by the author in his former publications on the basis of this model and its derivatives. Therefore, supplementing a mathematical basis of the previous analyses is the purpose of this paper. After presenting the structure of the model, proofs of the statements about the existence, uniqueness and global asymptotic stability of the steady state were given. In the closing remarks, the ways in which the analytical results achieved in this paper could be used in further research have been pointed out.