Krzysztof Piasecki
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu,
Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Badań Operacyjnych

APRECJACJA KAPITAŁU W WARUNKACH STAŁEJ AWERSJI DO RYZYKA PŁYNNOŚCI

Streszczenie: Wartość przyszła został przedstawiona jako trend zależny od awersji do ryzyka. Otrzymany model został zastosowany w finansach behawioralnych.

Słowa kluczowe: użyteczność, wartość przyszła, awersja do ryzyka, dyskonto, finanse behawioralne, silnie efektywne rynki finansowe, paradoks równowagi rynkowej.

Problem badawczy

Każdy przyszły przepływ finansowy jest obarczony ryzykiem terminu. Ryzyko to jest identyfikowane z ryzykiem utraty płynności implikowanym przez wydłużanie się horyzontu czasowego inwestycji. Koszt tego ryzyka zmniejsza wartość bieżącą ocenianego przepływu. Zmniejszenie to nazywamy dyskontem wartości przepływu. W klasycznych modelach arytmetyki finansowej dyskonto to zależy od horyzontu czasowego inwestycji i prędkości aprecjacji kapitału mierzonej za pomocą nominalnej stopy procentowej. Z drugiej strony wartość dyskonta jest implikowana przez ryzyko terminu. W tej sytuacji nie można nie wykluczyć tego, że na ocenę wartości dyskonta ma także wpływ podatność oceniającego na ryzyko. Każda metoda dyskontowania jest określona poprzez przebieg zmienności założonego modelu aprecjacji kapitału. W niniejszym artykule przedstawiono model aprecjacji kapitału, w którym jest uwzględniony wpływ awersji do ryzyka. Przedstawiono też propozycję wykorzystania tego modelu w finansach behawioralnych.

1. Elementy teorii użyteczności strumienia finansowego

Przeprowadzone w tym punkcie rozważania o użyteczności są w całości oparte na wynikach dyskusji przeprowadzonej między innymi w pracach: [Frederick, Loewenstein i O'Donoghue 2002; Epper, Fehr-Duda i Bruhin 2009; Killeen 2009; Kim i Zauberman 2009; Zauberman i in. 2009; Kontek 2010, Doyle 2010].

W analizie rynków finansowych każda z płatności jest reprezentowana przez instrument finansowy opisany jako strumień finansowy (t, C), gdzie symbol t oznacza moment przepływu strumienia, a symbol C opisuje wartość nominalną tego przepływu. Każdy z tych strumieni finansowych może być należnością lub wymaganym zobowiązaniem. Wartość nominalna każdej należności jest nieujemna. Zobowiązania obciążające dłużnika stanowią zawsze należność wierzyciela. Wartość zobowiązania jest równa wartości należności odpowiadającej temu zobowiązaniu wziętej ze znakiem minus. Należność zawsze stanowi kapitał wierzyciela. Zobowiązanie dłużnika powstaje na skutek udostępnienia tego kapitału dłużnikowi przez wierzyciela. Zatem wartość kapitału nie zależy od kierunku przepływu płatności definiującej ten kapitał. W tej sytuacji wartość kapitału jest równa wartości należności określającej ten kapitał.

Nasze dalsze rozważania ograniczymy do zbioru $\Phi = [0, +\infty[\times [0, +\infty[$ wszystkich strumieni finansowych (t, C) opisujących poszczególne wypłaty z tytułu zbycia praw do kapitału. Na zbiorze tych wypłat każdy z inwestorów określa swoje preferencje. Preferencje te są określone za pomocą specyficznej funkcji użyteczności wypłaty $U\colon \Phi \to [0, +\infty[$. Każda z tych funkcji użyteczności może mieć subiektywny charakter [Dacey i Zielonka 2005]. Pomimo to wszystkie z nich charakteryzują się pewnymi wspólnymi cechami.

Każdy z inwestorów oceniających użyteczność poszczególnych strumieni finansowych może też dodatkowo brać pod uwagę przesłanki inne niż moment przepływu i jego wartość nominalną. Wobec definicji strumienia finansowego są to czynniki egzogeniczne. W niniejszym artykule, stosując uogólnioną zasadę *ceteris paribus,* nasze rozważania ograniczymy do pary (t, C) czynników endogenicznych.

Referując podstawy teorii kapitału, de Soto [2009] przedstawił regułę preferencji czasowej. Reguła ta głosi, że przy uwzględnieniu zasady *ceteris paribus* podmiot ekonomiczny woli zaspokoić swoje potrzeby bądź osiągać postawione cele możliwie jak najszybciej. Inaczej mówiąc, gdy podmiot ma przed sobą dwa cele o subiektywnie jednakowej wartości, wówczas wyżej sobie ceni ten, który może osiągnąć w krótszym czasie. W szczególnym wypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie wypłaty o równej wartości, preferuje zawsze wypłatę szybciej dostępną. Oznacza to, że użyteczność strumienia jest malejącą funkcją czasu, co zapisujemy

$$\forall C > 0\colon t_2 > t_1 \geq 0 \Rightarrow U(t_2, C) < U(t_1, C).$$

Z drugiej strony jest oczywiste, że każdy podmiot ekonomiczny w swym działaniu kieruje się regułą preferencji majątkowej. Reguła ta oznacza, że przy uwzględnieniu zasady *ceteris paribus* podmiot ekonomiczny woli wchodzić we władanie możliwie jak najbardziej wartościowych przedmiotów ekonomicznych. Czyli jeśli ma przed sobą dwa przedmioty ekonomiczne równocześnie dostępne, to wybiera ten, który charakteryzuje się większą subiektywną wartością. W szczególnym wypadku oznacza to, że inwestor, porównując dwie równocześnie dostępne wypłaty, wybiera zawsze wypłatę o wyższej wartości. Oznacza to, że użyteczność wypłaty jest rosnącą funkcją wartości nominalnej, co zapisujemy

$$\forall t \geq 0\colon C_2 > C_1 > 0 \Rightarrow U(t, C_2) > U(t, C_1). \tag{1}$$

Kwestią umowna jest wyskalowanie wartości funkcji użyteczności. Przyjmujemy tutaj, że użyteczność natychmiastowej wypłaty jest równa wartości nominalnej tej wypłaty. Założenie to zapisujemy w poniższy sposób

$$\forall C \geq 0\colon U(0, C) = C. \tag{2}$$

Jeśli dwie wypłaty są jednakowo użyteczne, to uważamy je za równoważne. O wypłacie równoważnej do danej mówimy, że jest ekwiwalentem tej ostatniej. Analiza opisanych cząstkowych przebiegów zmienności funkcji użyteczności prowadzi nas do sformułowania zasady aprecjacji. Zasada ta głosi, że jeśli dwie nierównoczesne wypłaty są równoważne, to wartość późniejszej wypłaty jest większa od wartości wcześniejszej wypłaty. Wychodząc z tej zasady można określić proces aprecjacji polegający na tym, że wartość ekwiwalentu wypłaty rośnie wraz z czasem, po jakim ten ekwiwalent będzie płatny.

Opisany powyżej proces aprecjacji może być opisany za pomocą modelu formalnego. Niech będzie dana natychmiastowa wypłata $(0, C)$. Symbolem (t, C_t) określamy ekwiwalent wypłaty $(0, C)$ płatny w momencie $t \geq 0$. Zgodnie z definicją relacji równoważności wypłat i warunkiem (2) mamy tożsamość

$$C = U(0, C) = U(t, C_t).$$

Zgodnie z warunkiem (1), dla ustalonego momentu $t \geq 0$ jednoznacznie wyznaczamy wartość ekwiwalentu

$$C(t) = C_t = FV(C, t) = U_C^{-1}(t, C),$$

gdzie

$$U_C^{-1}(t, x) = y \Leftrightarrow U(t, y) = x.$$

Określoną w ten sposób funkcję $FV\colon \Phi \to [0, +\infty[$ w arytmetyce finansowej nazywamy wartością przyszłą. W ogólnym wypadku funkcja ta ma następujące właściwości:

$$\forall C > 0: t_2 > t_1 \geq 0 \Rightarrow FV(C, t_2) > FV(C, t_1),$$

$$\forall t \geq 0: C_2 > C_1 > 0 \Rightarrow FV(C_2, t) > FV(C_1, t), \tag{3}$$

$$\forall C \geq 0: FV(C, 0) = C. \tag{4}$$

Jeśli dodatkowo założymy brak efektu synergii kapitału, te wtedy warunek (3) zastępujemy przez silniejszy warunek

$$\forall t \geq 0: C_2 > C_1 > 0 \Rightarrow FV(C_1 + C_2, t) = FV(C_1, t) + FV(C_2, t). \tag{5}$$

W pracy K. Piaseckiego [2005] pokazano, że warunek (5) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dowolna funkcja wartości przyszłej $FV: \Phi \to [0, +\infty[$ była określona przez tożsamość

$$FV(C, t) = C \cdot \varphi(t),$$

gdzie funkcja $\varphi: [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ jest niemalejącą funkcją spełniającą dodatkowo warunek brzegowy

$$\varphi(0) = 1.$$

W arytmetyce finansowej funkcję tę nazywamy czynnikiem aprecjacji kapitału.

2. Model kapitalizacji ciągłej

Ze zjawiskiem kapitalizacji ciągłej mamy do czynienia jedynie wtedy, gdy nominalna stopa procentowa opisuje prędkość aprecjacji. Przystępując do wyznaczenia przebiegu zmienności funkcji wartości przyszłej $FV: \Phi \to [0, +\infty[$, dla dowolnego momentu $t \geq 0$ i dowolnej przyjętej długości okresu odroczenia $\Delta t > 0$ wyznaczamy ekwiwalenty wartości kapitału $C(t)$ i $C(t + \Delta t)$. Wtedy momentowi czasu $t \geq 0$ jest przypisana stopa forward

$$p_{\Delta t}(t) = \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t \cdot C(t)}.$$

Zgodnie z tym trend ekwiwalentu wartości kapitału spełnia warunek Lipschitza, a więc jest jednostajnie ciągły. Dodatkowo zakładamy, że trend jest dostatecznie gładki[1]. Przyjęcie tego założenia oznacza, że zmiany prędkości aprecjacji kapitału nie będą się odbywały skokowo.

[1] Oznacza to tutaj istnienie ciągłej pierwszej pochodnej rozważanej funkcji.

Chwilową stopę forward definiujemy, jako stopę forward obligacji zerokuponowej o horyzoncie wymagalności $\Delta t \to 0$ [Siegel i Nelson 1987]. W tej sytuacji w naszych rozważaniach chwilową stopę forward będziemy interpretować jako chwilową względną prędkość aprecjacji kapitału. Zmierzając do wyznaczenia tej stopy, obliczamy granicę:

$$\lim_{\Delta t \to 0^+} p_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t \cdot C(t)} = \frac{1}{C(t)} \cdot \frac{dC}{dt} = \delta(t). \tag{6}$$

W literaturze przedmiotu[2] granicę $\delta(t)$ nazywamy także intensywnością oprocentowania. Intensywność oprocentowania jest identyczna ze stopą wzrostu wyznaczoną dla trendu opisującego proces aprecjacji kapitału.

Warunki (4) i (6) prowadzą nas do określenia zagadnienia początkowego:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C(t)} \cdot \dfrac{dC}{dt} = \delta(t), \\ C(0) = C_0. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego zagadnienia pozwala na jednoznaczne określenie trendu wartości przyszłej wartości skapitalizowanej ciągle:

$$C(t) = FV(C_0, t) = C_0 \cdot \exp\left\{ \int_0^t \delta(\tau)\, d\tau \right\}. \tag{7}$$

Z drugiej strony jednostkowa cena kapitału wymagalnego w przyszłym momencie $t > 0$ jest określona przez stopę spot $y(t)$. Mamy wtedy

$$C(t) = FV(C_0, t) = C_0 \cdot \exp\{t \cdot y(t)\}. \tag{8}$$

Stopa spot $y(t)$ określa jednostkową cenę kapitału lokowanego na okres $t > 0$. Atrakcyjność każdej inwestycji rośnie wraz ze wzrostem jednostkowej ceny kapitału. Stąd wartość $y(t)$ stopy spot możemy interpretować jako użyteczność zainwestowania kapitału w inwestycję o ustalonym horyzoncie czasowym $t > 0$.

Opóźnienie terminu wymagalności kapitału oznacza wzrost ryzyka utraty płynności. Ten wzrost ryzyka inwestor kompensuje sobie wzrostem jednostkowej ceny kapitału. Oznacza to, że trend stopy spot y: $[0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ jest funkcją rosnącą. Teoria finansów pokazuje też, że dowolna stopa spot spełnia dwa kryteria asymptotyczne. Pierwszym z tych kryteriów jest warunek renty wieczystej

[2] Na przykład [Chrzan 2001].

$$\exists y_\infty > 0: \lim_{t \to +\infty} y(t) = y_\infty, \tag{9}$$

gdzie y_∞ jest stopą renty wieczystej. Kolejnym kryterium jest warunek bieżącej chwilowej stopy natychmiastowej

$$\exists y_0 > 0: \lim_{t \to 0^+} y(t) = y_0,$$

gdzie y_0 jest stopą natychmiastową bieżącej inwestycji zerokuponowej o horyzoncie wymagalności $\Delta t \to 0$. W pracy L. Svennsona [1994] stopa ta jest identyfikowana z bieżącą stopą O/N. Wobec monotoniczności trendu stopy spot mamy

$$y_0 < y_\infty. \tag{10}$$

Wzrost ryzyka utraty płynności implikuje ograniczenie wzrostu ceny jednostkowej kapitału wywołanego opóźnieniem momentu wymagalności. Oznacza to, że wzrost trendu stopy spot jest ograniczony przez awersję do ryzyka. Nie mając dokładniejszych informacji o rozkładzie tej awersji, zakładamy, ze jest ona niezależna od horyzontu czasowego inwestycji. Oznacza to, że natężenia tej awersji jest stałe w czasie. Stosując wskaźnik Arrowa-Pratta awersji do ryzyka [Pratt 1964; Arrow 1971] założenie to opisujemy za pomocą warunku

$$\exists \rho > 0: -\frac{y''(t)}{y'(t)} = \rho.$$

Porównanie tożsamości (7) i (8) dowodzi, że trend stopy spot ma ciągłą pierwszą pochodną. Powyżej dodatkowo założyliśmy jedynie ciągłość drugiej pochodnej trendu stopy spot. Jedynym rozwiązaniem zadania (8), (9) i (10) jest trend określony przez tożsamość

$$y(t) = y_\infty - \left(y_\infty - y_0\right) \cdot \exp\left\{-\rho \cdot t\right\}.$$

W tej sytuacji funkcja wartości przyszłej jest określona za pomocą tożsamości

$$C(t) = FV\left(C_0, t\right) = C_0 \cdot \exp\left\{t \cdot \left(y_\infty - \left(y_\infty - y_0\right) \cdot \exp\left\{-\rho \cdot t\right\}\right)\right\}.$$

Sprzężona z powyższym trendem aprecjacji kapitału funkcja wartości przyszłej $PV(\cdot \mid \rho): \Phi \to \left[0, +\infty\right[$ jest wtedy określona za pomocą zależności

$$PV\left((t, C) \mid \rho\right) = C \cdot \exp\left\{t \cdot \left(\left(y_\infty - y_0\right) \cdot \exp\left\{-\rho \cdot t\right\} - y_\infty\right)\right\}.$$

Funkcja ta może zostać wykorzystana do zdyskontowania wartości przyszłego przepływu finansowego (t, C). Stopa dyskonta wynosi wtedy

$$D(t,\rho)=\frac{C-C\cdot\exp\left\{t\cdot\left(\left(y_\infty-y_0\right)\cdot\exp\{-\rho\cdot t\}-y_\infty\right)\right\}}{C}=$$
$$=1-\exp\left\{t\cdot\left(\left(y_\infty-y_0\right)\cdot\exp\{-\rho\cdot t\}-y_\infty\right)\right\}.$$

W elementarny sposób można wykazać, że wyznaczona powyżej stopa dyskonta jest rosnącą funkcją wskaźnika do awersji. W sytuacji, gdy awersja do ryzyka jest indywidualną cechą każdego z inwestorów, opisany model może zostać wykorzystany do budowy formalnych modeli finansów behawioralnych. W modelu tym obiektywne czynniki fundamentalne są reprezentowane przez wartości i opisanych powyżej stop procentowych.

3. Zróżnicowana awersja do ryzyka jako przesłanka równowagi rynkowej

Weźmy pod uwagę dowolny papier wartościowy $\mathcal{Y}$ stanowiący przedmiot obrotu na ustalonym rynku finansowym. O rozważanym rynku finansowym będziemy zakładać, że jest w pełni efektywny. W tej sytuacji wszyscy uczestnicy rynku przyjmują identyczną wartość przyszłą $C > 0$ danego papieru wartościowego. W momencie czasowym $t > 0$ instrument ten jest reprezentowany przez strumień finansowy (t, C). Wartość bieżąca tego strumienia jest identyfikowana przez inwestora jako cena równowagi finansowej instrumentu finansowego $\mathcal{Y}$.

Rozważmy teraz parę inwestorów ($\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$) różniących się pomiędzy sobą awersją do ryzyka. Awersja do ryzyka inwestora $\mathcal{P}_i$ jest scharakteryzowana przez wskaźnik awersji do ryzyka o wartości ρ_i. Załóżmy teraz, że inwestor $\mathcal{P}_1$ charakteryzuje się większą awersja do ryzyka niż inwestor $\mathcal{P}_2$. Mamy wtedy

$$\rho_1 > \rho_2,$$

co prowadzi ostatecznie do

$$C_{0,1}=PV\left((t,C)\,|\,\rho_1\right)<PV\left((t,C)\,|\,\rho_2\right)=C_{0,2}.$$

Widzimy, że częściowo subiektywnie szacowana cena równowagi maleje wraz ze wzrostem awersji do ryzyka.

Oboje inwestorzy obserwują tę samą wartość $\check{C}$ ceny rynkowej. Jeśli wartość ta spełnia warunek

$$C_{0,\,1} < \check{C} < C_{0,\,2},$$

to inwestor $\mathcal{P}_1$ zamierza sprzedać instrument finansowy $\mathcal{Y}$. Równocześnie ten sam instrument planuje kupić inwestor $\mathcal{P}_2$. Popyt na instrument finansowy $\mathcal{Y}$ zgłaszany przez inwestora $\mathcal{P}_2$ jest równoważony przez podaż instrumentu $\mathcal{Y}$ oferowaną przez inwestora $\mathcal{P}_1$.

Paradoks utrzymywania się równowagi rynkowej na silnie efektywnym rynku finansowym opisano między innymi w pracy K. Piaseckiego [2011]. Powyżej pokazano, że przesłanką do wyjaśnienia tego paradoksu może być zróżnicowanie awersji poszczególnych inwestorów do ryzyka.

Bibliografia

Arrow, K.J., 1971, *Essays in the Theory of Risk-bearing*, North Holland, Amsterdam.
Chrzan, P., 2001, *Teoria procentu*, Oikońomos, Katowice.
Dacey, R., Zielonka, P., 2005, *A Detailed Prospect Theory Explanation of the Disposition Effect*, Journal of Behavioral Finance 2/4.
Doyle, J.R., 2010, *Survey of Time Preference, Delay Discounting Models*, Working Paper, Cardiff Business School, Cardiff University, http://ssrn.com/abstract=1685861 [dostęp: 12.01.2011].
Epper, T., Fehr-Duda, H., Bruhin, A., 2009, *Uncertainty Breeds Decreasing Impatience: The Role of Risk Preferences in Time Discounting*, Working Paper no. 412. Institute for Empirical Research in Economics, University of Zuerich, http://ssrn.com/abstract=1416007 [dostęp: 15.02.2011].
Frederick, S., Loewenstein, G., O'Donoghue, T., 2002, *Time Discounting and Time Preference*: *A Critical Review*, Journal of Economic Literature, vol. 40.
Killeen, P.R., 2009, An *Additive-utility Model of Delay Discounting*, Psychological Review, 116.
Kim, B.K., Zauberman, G., 2009, *Perception of Anticipatory Time in Temporal Discounting*, Journal of Neuroscience, Psychology and Economics, vol. 2.
Kontek, K., 2010, *Decision Utility Theory: Back to von Neumann, Morgenstern, and Markowitz*. Working Paper, http://ssrn.com/abstract=1718424 [dostęp: 03.01.2011].
Piasecki, K., 2005, *Od arytmetyki handlowej do inżynierii finansowej*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.
Piasecki, K., 2011, *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
Pratt, J.W., 1964, *Risk Aversion in the Small and in the Large*, Econometrica 1.
Siegel, A.F., Nelson, Ch.R., 1987, *Parsimonious Modeling of Yield Curves*, Journal of Business 60.

Soto, J.H. de, 2009, *Pieniądz, kredyt bankowy i cykle koniunkturalne*, Instytut Misesa, Warszawa.

Svensson, L., 1994, *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates*: *Sweden 1992–1994*, National Bureau of Economic Research, Cambridge.

Zauberman, G., Kyu Kim, B., Malkoc, S., Bettman, J.R., 2009, *Discounting Time and Time Discounting*: *Subjective Time Perception and Intertemporal Preferences*, Journal of Marketing Research, vol. XLVI.

CAPITAL APPRECIATION UNDER CONSTANT LIQUIDITY RISK AVERSION

Summary: Future value is presented as a trend dependent on risk aversion. The obtained model was applied for behavioural finance.